Veckoblad 6, Linjär algebra IT, VT2010

Under den näst sista veckan ska vi under måndagens föreläsning börja titta på begreppen egenvärde och egenvektorer vilket också är temat för övningen på tisdagen. Detta kommer att avslutas på torsdagen då vi också börjar titta på kursens sista avsnitt om grafer och grannmatriser. Detta är ett avsnitt som kommer att knyta ihop denna kurs med kursen i diskret matematik och som har viktiga datalogiska tillämpningar.

De viktigaste teoretiska begreppen och resultaten under veckan är följande:

- Den karakteristiska ekvationen för att bestämma egenvärden till en matris.
- Egenvärdena för en triangulär matris är lika med elementen på diagonalen.
- Egenvektorer till olika egenvärden är linjärt oberoende.
- En $n \times n$-matris med n olika egenvärden har egenvektorer som utgör en bas för $\mathbb{R}^n$.
- En $n \times n$-matris har n stycken ortogonala egenvektorer om och endast om A är symmetrisk.
- Begreppet diagonaliserbar och dess relation till egenvärden och egenvektorer.
- Diagonalisering ger snabbt sätt att beräkna potenser.

Viktiga typer av problem som vi kommer att öva på och som du ska kunna lösa med stöd av teorin är följande:

- Bestämma egenvärden och egenvektorer för 2×2- och 3×3-matriser med hjälp av karakteristiska ekvationen.
- Utifrån egenvärdena och egenvektorerna för en matris kunna tolka vad motsvarande linjära avbildning är för typ av avbildning.
- Bestämma egenvärden och egenvektorer för en triangulär matris.
- Bestämma en bas bestående av egenvektorer till en matris.
- Avgöra om en matris är diagonaliserbar och bestämma en diagonlisering.
- Bestämma en matris med givna egenvärden och egenvektorer.
- Bestämma potensen av en matris med hjälp av en diagonalisering av matrisen.

Övningsuppgifter

Avsnitt 8.2

1.•(L)

a) Beräkna egenvärden och egenvektorer till matrisen $A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

b) Beskriv geometriskt vad den linjära avbildningen som svarar mot matrisen A är. Din beskrivning bör innehålla något av orden projektion, spegling eller rotation.

2.•(L) Bestäm alla egenvärden och egenvektorer till

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 6 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}.$$

3.•() Bestäm alla egenvärden och egenvektorer till matrisen

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

4. (L*) Låt A vara en stokastisk 2×2-matris, d v s alla element är större än eller lika med noll och summan av alla kolonner är ett. Visa att A har två reella egenvärden $\lambda_1 = 1$ och λ_2 med $-1 \leq \lambda_2 \leq 1$.

5.•(L) Ge två 2×2-matriser vars enda egenvärde är 0.

6. (L*)

a) Låt A vara en 3×3-matris med egenvärden λ_1, λ_2 och λ_3. Visa att summan av dessa egenvärden är lika med summan av elementen på diagonalen i A (Summan av elementen i diagonalen kallas för *spåret* av matrisen.)

b) Bevisa generaliseringen av första deluppgiften till en $n \times n$-matris A med n egenvärden.

Avsnitt 8.4

7.•(L) Låt

$$A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Beräkna A^{1000}.

8.•(L) Ge en matris A som har egenvärden $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$ och $\lambda_3 = 4$ med motsvarande egenvektorer

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ och } \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

9.$^\bullet$(L)

a) Bestäm en 3×3-matris som har egenvärdena $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 1$ respektive $\lambda_3 = -1$ med motsvarande ortogonala egenvektorer

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ och } \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

b) Om man sätter $\mathbf{v}_1 = (2\ 2\ \ -8)^t$ istället så finns det ingen matris med de givna egenvärdena och egenvektorerna. Varför inte det? Motivera svaret väl.

10.$^\bullet$(L) Bestäm ON-matris P och diagonalmatris D sådana att $A = PDP^t$ då

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -2 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Tips: Ett av egenvärdena är 1.

11.$^\bullet$(L) Vektorerna

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 2/7 \\ 3/7 \\ 6/7 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 3/7 \\ -6/7 \\ 2/7 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 6/7 \\ 2/7 \\ -3/7 \end{pmatrix}$$

utgör en bas för $\mathbb{R}^3$. Bestäm en 3×3-matris som egenvärden $1,\ 2$ och 3 med motsvarande egenvektorer $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ och $\mathbf{v}_3$.

12.$^\bullet$(L*) Vi definierar normen av en matris A, $\|A\|$, som roten ur summan av kvadraten av alla element i A. Med andra ord får vi t ex för en 2×2-matris att om

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ så är } \|A\| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}.$$

Låt nu A vara en 2×2-matris med två olika egenvärden λ_1 och λ_2. Antag att $|\lambda_1| < 1$ och $|\lambda_2| < 1$. Bevisa att i så fall är

$$\lim_{n\to\infty} \|A^n\| = 0.$$

Facit

1. 0 är egenvärde med egenvektorer alla multiplar av $(1 \ \ -1)^t$ och 1 är egenvärde med egenvektorer alla multiplar av $(1\ 1)^t$. Det är ortogonal projektion på linjen genom origo med riktningsvektor $(1\ 1)^t$

2. $\lambda = 1$ med egenvektorer $c \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ och $\lambda = -2$ med egenvektorer $c \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

3. $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 3$ och $\lambda_3 = 2$ med $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} -6 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ och $\mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

5. T ex $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ och $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

7. $\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + 2^{1000} & 1 - 2^{1000} \\ 1 - 2^{1000} & 1 + 2^{1000} \end{pmatrix}$

8. T ex $A = \frac{1}{25} \begin{pmatrix} 34 & 12 & 0 \\ 12 & 41 & 0 \\ 0 & 0 & 100 \end{pmatrix}$

9.

a) T ex $\frac{1}{9} \begin{pmatrix} 11 & 8 & -2 \\ 8 & 5 & 10 \\ -2 & 10 & 2 \end{pmatrix}$

b) Tips: De tre vektorerna är linjärt beroende vilket är omöjligt. Varför?

10. T ex $P = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix}$ och $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$

11. T ex $A = \frac{1}{49} \begin{pmatrix} 130 & 6 & -30 \\ 6 & 93 & -24 \\ -30 & -24 & 71 \end{pmatrix}$