Veckoblad 7, Linjär algebra IT, VT2010

Under den sista veckan ska vi under måndagens föreläsning se hur man kan använda matriser för att representera grafer och matrisalgebra för att svara på olika frågor om egenskaper hos grafen. Därefter kommer vi att titta på slumpvandringar på grafer som har många tillämpmningar av vilka ett exempel som vi sett tidigare är Googles Pagerank. Vi generaliserar sedan begreppet slumpvandring och får ett begrepp som kallas Markovkedja. Ett exempel på en Markovkedja som vi tittat på tidigare är uthyrningen av bilar där vi såg att fördelningen stabiliserade sig oavsett startfördelning och detta är ett typiskt beteende för slumpvandringar och Markovkedjor. På torsdagen kommer vi att avsluta detta avsnitt och titta på förra årets tenta. På fredagen kommer det att vara en extra räkneövning klockan 13-15.

De viktigaste teoretiska begreppen och resultaten under veckan är följande:

- Grafbegreppen grad, väg, cykel och sammanhängande.
- Om det finns väg mellan två noder i en graf med n noder så finns det väg av längd högst n.
- Begreppet grannmatris till en graf.
- Om A är grannmatrisen för en graf så är element (i, j) i A^k antalet vägar från nod i till nod j.
- Om A är grannmatrisen till en graf med n noder så finns det en väg mellan nod i och nod j om och endast element (i, j) i matrisen $B = \sum_{k=1}^{n} A^k$ är större än noll.
- En graf med grannmatris A är sammanhängande om och endast om alla element i $B = \sum_{k=1}^{n} A^k$ är större än noll.
- Begreppen slumpvandring och övergångsmatrisen för en slumpvandring.
- Begreppen fördelningsvektor och stationär fördelning.
- Begreppet tvådelad graf.
- Slumpvandringen på en sammanhängande och ej tvådelad graf har en unik stationär fördelning och raderna i potensen av övergångsmatrisen konvergerar mot denna unika stationära fördelning.
- Den stationära fördelningen till en slumpvandring kan beräknas med hjälp av nodernas grader.
- Begreppet periodisk graf.
- Begreppet Markovkedja.
- En Markovkedja som är starkt sammanhängande och ej periodisk har en unik stationär fördelning och raderna i potensen av övergångsmatrisen konvergerar mot denna unika stationära fördelning.

Viktiga typer av problem som vi kommer att öva på och som du ska kunna lösa med stöd av teorin är följande:

- Bestämma grannmatrisen till en graf.
- Beräkna antalet vägar av given längd mellan två noder i en graf med hjälp av potensen av grannmatrisen.
- Bestämma övergångsmatrisen till slumpvandringen på en graf.
- Beräkna fördelningsvektorn efter ett givet antal steg för en slumpvandring respektive Markovkedja.
- Beräkna stationära fördelningen till slumpvandringen på en graf.
- Bestämma övergångsmatrisen till en Markovkedja.
- Beräkna stationära fördelningen till en Markovkedja.

Övningsuppgifter

Avsnitt 10.2

1.•() Låt R vara den riktade grafen i figur 1 och låt G vara den underliggande grafen.

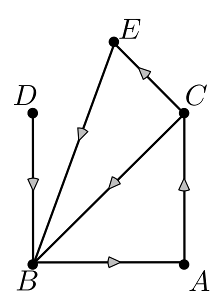
a) Bestäm grannmatrisen för R. Ta noderna i bokstavsordning.

b) Bestäm grannmatrisen för G.

c) Använd följdsats 10.22 för att avgöra om G är sammanhängande och om R är starkt sammanhängande.

d) Använd matrisalgebra för att beräkna hur många vägar av längd högst 3 det finns mellan nod C och nod B i grafen G?

e) Använd matrisalgebra för att beräkna hur många vägar av längd högst 5 det finns från nod C till nod B i riktade grafen R?



Figur 1: Riktade grafen till första uppgiften i avsnitt 10.2.

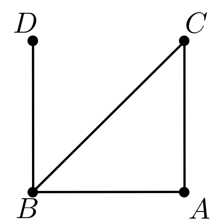
Avsnitt 10.3

2.$^\bullet$(L) Betrakta grafen i figur 2

a) Ange grannmatrisen för grafen. Ta noderna i bokstavsordning.

b) Ange övergångsmatrisen för slumpvandringen på grafen.

c) Bestäm den stationära fördelningen för slumpvandringen.



Figur 2: Grafen till första uppgiften i avsnitt 10.3.

3.$^\bullet$(L) Låt R vara den riktade grafen i figur 1.

a) Ange övergångsmatrisen för slumpvandringen på R.

b) Bestäm den stationära fördelningen för slumpvandringen på R.

Avsnitt 10.4

4.$^\bullet$(L) Biluthyrningsfirman Hyr-Ett-Vrak har ett kontor på Landvetter och ett vid Centralen. Av de bilar som i början av en vecka hör till Landvetterkontoret är det en vecka senare så att 88% också nästa vecka hör dit medan resten lämnats tillbaka på Centralen och därmed hör dit. För de som hörde till Centralen är det efter en vecka 90% som fortfarande hör dit och resten hör till Landvetter efter en vecka.

a) Hur stor andel av bilarna hör till Landvetter-kontoret efter 'lång tid', d v s vad blir fördelningen då tiden går mot oändligheten, om man inte kompenserar och förflyttar bilar från det ena till det andra kontoret.

b) Man vet att 70% av alla uthyrningar görs från Landvetterkontoret. Hur stor andel av bilarna måste i slutet av varje vecka flyttas från det ena till det andra kontoret om man vill börja varje vecka med 70% av bilarna på Landvetter?

5.$^\bullet$(L) Biluthyrningsfirman Hyr-Ett-Vrak har två kontor, ett på Centralen och ett på Landvetter. Av de bilar som är på Centralen i början av en vecka är 70% kvar där i början av veckan därpå, 10% finns på Landvetter och 20% är uthyrda. För Landvetter är motsvarande siffror att 60% är kvar på Landvetter, 10% är på Centralen och 30% är uthyrda. Av de som var uthyrda i början av en vecka är 50% det också veckan därpå, 30% är på Centralen och 20% på Landvetter. Till ägarens stora förvåning (han borde kanske ta en kurs i linjär algebra) så visar det sig att fördelningen av bilar stabiliserar sig efter ett tag. Bestäm fördelningen av bilar på Centralen, på Landvetter respektive som är uthyrda efter att den stabiliserat sig.

6.$^\bullet$(L) Betrakta en Markovkedja med tre noder a, b repsektive c som har övergångsmatrisen

$$M = \begin{pmatrix} 1/4 & 1/4 & 1/2 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/6 & 1/6 & 2/3 \end{pmatrix}.$$

a) Antag att vi väljer startnod på måfå, d v s alla tre noderna med samma sannolikhet. Vad är sannolikheten att vi är i nod a efter 1 steg?

b) Antag att vi återigen väljer startnod på måfå. Vad är sannolikheten att vi är i nod b efter 2 steg?

c) Beräkna den stationära fördelningen.

Facit

1.

a) $A_R = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

b) $A_G = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

c) Riktade grafen R är ej starkt sammanhängande ty

$$\sum_{i=1}^{5} A_R^i = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 5 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

innehåller minst en nolla, men grafen G är sammanhängande ty redan

$$\sum_{i=1}^{2} A_G^i = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

saknar nollor.

d) 9

e) 5

2.

a) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{3}{8} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{8} \end{pmatrix}$.

3.

a) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

b) $\left(\frac{2}{7}\ \frac{2}{7}\ \frac{2}{7}\ 0\ \frac{1}{7}\right)$

4.

a) $5/11$

b) 5.4% av totala bilparken ska köras från Centralen ut till Landvetter

5. $7/17$ på Centralen, $9/34$ på Landvetter och $11/34$ är uthyrda.

6.

a) $1/4$

b) $11/48$

c) $(2/9\ 2/9\ 5/9)$