Affina avbildningar

Teoriövningar

1. Bestäm matriserna för följande linjära avbildningar. Sats 3.11, exempel 3.17 och proposition 3.18 kan vara till hjälp.

   (a) i två dimensioner

   - Rotation moturs θ radianer kring origo.
   - Skalning med en faktor s.
   - Ortogonal projektion på x-axeln respektive y-axeln.

   (b) i tre dimensioner

   - Rotation moturs θ radianer kring z-axeln.
   - Skalning med en faktor s.
   - Ortogonal projektion på xy-planet, yz-planet respektive xz-planet.

2. När man sysslar med (dator)-grafik är utöver linjära avbildningar också translationer mycket viktiga. En translation med en vektor $\mathbf{b}$, $T_{\mathbf{b}}$ är helt enkelt addition med vektorn $\mathbf{b}$:
$$T_{\mathbf{b}}(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + \mathbf{b}.$$

   (a) Visa att en translation **inte** är en linjär avbildning (om $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$).

   (b) Låt $f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ vara en linjär avbildning med matrisen $A = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$. Beräkna $T_{\mathbf{b}} \circ f(\mathbf{x})$ och $f \circ T_{\mathbf{b}}(\mathbf{x})$. När är de lika?

   Kommentar: Det finns dock ett "trick" för att få också translationer att bli linjära, genom att ersätta 2×2-matriserna med 3×3-matriser och en vektor
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \text{med} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}.$$

   Vi återkommer till detta senare i kursen.

3. En affin avbildning är en (godtycklig) sammansättning av en linjär avbildning och en translation.

   (a) Visa att om f är en affin avbildning så finns det matris A och vektor $\mathbf{b}$ sådana att $f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} + \mathbf{b}$.

   (b) Visa att sammansättningen av två linjära avbildningar är en linjär avbildning. Vilken räkneregel är det ni utnyttjar?

   (c) Visa att sammansättningen av två affina avbildningar är en affin avbildning.

   (d) Låt f_t vara funktionen som roterar t radianer moturs runt punkten $(1, 1)$. Visa att f_t är en affin avbildning genom att bestämma en matris A_t och en vektor $\mathbf{b}_t$ sådana att
$$f_t(\mathbf{x}) = A_t\mathbf{x} + \mathbf{b}_t.$$

Datorövningar

1. Konstruera Matlab-funktioner som

   (a) har argument s och ger den 2×2-matris som svarar mot skalning med s.

   (b) har argument t och ger den 2×2-matris som svarar mot rotation t radianer moturs.

2. (a) Konstruera en funktion som har tre argument: A, $\mathbf{b}$ och $\mathbf{x}$ där A är en 2×2-matris och $\mathbf{b}$ och $\mathbf{x}$ är 2-vektorer. Funktionen ska plotta punkterna $\mathbf{x}$ och $A\mathbf{x} + \mathbf{b}$.

   (b) Samma som första deluppgiften fast plotta de två punkterna i två delfönster genom att använda 'subplot'.

3. Samma som uppgift 2 fast låt nu istället X vara en 'vektor' av n punkter lagrade som en $2 \times n$-matris. Funktionen ska rita den polygon med punkterna i X som hörn samt motsvarandes polygon då man tar $A\mathbf{x} + \mathbf{b}$ för de olika punkterna $\mathbf{x}$ i X. Exempelvis ska
$$X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
ge enhetskvadraten. Testa din funktion med lite olika matriser (t ex de från första uppgiften), vektorer $\mathbf{b}$ och polygoner X. Ett tips är att ta en lite oregelbunden polygon för att bättre se effekterna av den affina avbildningen. Använd gärna kommandot 'axis' (kanske i kombination med 'max' och 'min') för att få lämpliga gränser för graferna. Observera att 'axis' ska anges efter plot-kommandot.

4. Det finns ett kommando 'ginput' som hämtar koordinaterna för ett (eller flera) musklick, se hjälpen. Du ska nu använda detta för att få en pil att rotera och ändra längd så att den pekar dit du klickar.

   (a) Rita en pil som startar i origo och slutar i $(1, 0)$ i ett kvadratiskt koordinatsystem som går från -5 till 5 i båda riktningarna.

   (b) Gör en oändlig loop som i varje steg använder '[x,y]=ginput(1)' för att hämta koordinater för ett musklick och sedan roterar och skalar den ursprungliga pilen så att den fortfarande startar i origo men spetsen hamnar i punkten där du klickar. Funktionen 'atan', d v s arcus tangens, kan vara användbar för att bestämma en vinkel, men tänk på att 'atan' alltid ger en vinkel i intevallet $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ så det blir olika fall att ta hänsyn till beroende på tecknet hos x.

5. I den här uppgiften kommer du att ha användning av kommandona 'getframe' och 'movie' (samt en funktion som du gjort själv redan). Titta i hjälpen hur 'getframe' och 'movie' fungerar.

   (a) Gör en film som illustrerar en sekundvisare.

   (b) Utöka så att den också har minut- och timvisare. (Här tillåter du lämpligen tiden att gå snabbare (för att få lite "action") samt hoppar några sekunder i taget (för att inte göra slut på minnet)).

Uppgift 2 bland teoriuppgifterna samt uppgift 3 bland datoruppgifterna ska redovisas skriftligt till Stefan. Sista inlämningsdag är måndagen den 31 januari. Instruktioner för redovisningen finns på hemsidan.