Linjer, plan m m

Teoriövningar

1. Vi har sett att en linje i planet kan beskrivas antingen med en likhet $Ax+By+C=0$ eller på parameterform
$$\begin{cases} x = x_0 + tv_x \\ y = y_0 + tv_y. \end{cases}$$
   (a) Gör samma sak för en cirkel med centrum i origo och radien r, d v s en likhet och en parametrisering som beskriver cirkeln.
   (b) Ta nu istället en cirkel med centrum i en godtycklig punkt (x_0, y_0).
   (c) Låt $A = \left(\begin{smallmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$. Bestäm bilden av en cirkel med centrum i origo under den linjära avbildningen som ges av A. Bestäm en parametrisering och en ekvation för bilden.
   (d) (Om ni hinner) Bestäm en parametrisering av kurvan $x^4 + y^4 = r^2$. Eventuellt kan man ha nytta av funktionen
$$\operatorname{sgn}(t) = \begin{cases} 1, & \text{om } t > 0, \\ 0, & \text{om } t = 0, \\ -1, & \text{om } t < 0. \end{cases}$$

2. Biluthyrningsfirman Hyr-Ett-Vrak har två kontor, ett på Centralen och ett på Landvetter. Av de bilar som är på Centralen i början av en vecka är 70% kvar där i början av veckan därpå, 10% finns på Landvetter och 20% är uthyrda. För Landvetter är motsvarande siffror att 60% är kvar på Landvetter, 10% är på Centralen och 30% är uthyrda. Av de som var uthyrda i början av en vecka är 50% det också veckan därpå, 30% är på Centralen och 20% på Landvetter. Låt c_n vara antalet bilar på Centralen vecka n, l_n antalet bilar på Landvetter vecka n och u_n antalet uthyrda bilar vecka n och låt
$$\mathbf{v}_n = \begin{pmatrix} c_n \\ l_n \\ u_n \end{pmatrix}.$$
Bestäm en matris A sådan att $\mathbf{v}_n = A\mathbf{v}_{n-1}$. Uttryck $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ och $\mathbf{v}_n$ i termer av A, $\mathbf{v}_0$ och n.

3. Hur många multiplikationer av par av tal krävs det för att multiplicera en $m \times n$-matris med en $n \times p$-matris?

4. Antag att vi är i $\mathbb{R}^3$.
   (a) Vad blir lösningsmängden till (d v s vilken typ av objekt)
$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases}$$
   Det finns olika alternativ. Försök ge villkor på koefficienterna för att de olika fallen ska inträffa. (Tänk geometriskt!)
   (b) Vad blir lösningsmängden till (d v s vilken typ av objekt)
$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \\ A_3x + B_3y + C_3z + D_3 = 0. \end{cases}$$
   Det finns återigen olika alternativ. Försök ge villkor på koefficienterna för att de olika fallen ska inträffa. Vissa fall är svåra att ge några enkla villkor på, men gör ert bästa.

5. Kolla upp vad under- respektive övertriangulär matris betyder.
   (a) Vad händer om man multiplicerar en över-(under-)triangulär matris med en annan över-(under-)triangulär matris? Vad händer om man multiplicerar en övertriangulär matris med en undertriangulär?
   (b) Visa att (nästan) varje 2×2-matris $A = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ kan skrivas som en unik produkt $A = LU$, där
   $$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ l & 1 \end{pmatrix} \text{ och } U = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & v \end{pmatrix}.$$
   Bestäm L och U uttryckt i $a,\ b,\ c$ och d. Vilka A kan inte skrivas som $A = LU$?
   (c) (Om ni hinner) Visa att motsvarande resultat också gäller för varje 3×3-matris.

Datorövningar

1. För att rita en kurva i Matlab använder man sig lämpligen av en parametrisering av kurvan. Det första man behöver då är en parameter t. Matlab gillar inte att man säger t ex “Låt t vara intervallet mellan 0 och 2π”, utan man får nöja sig med ett antal punkter i $[0, 2\pi]$.
   (a) Kolla vad kommandona $t = 0 : 10$, $t = 0 : 0.2 : pi$ och $t = 0 : pi/16 : pi$ ger. Jämför slutvärdet på de två sista. Kommentar?
   (b) Vad händer om du t ex tar $\cos t$ där t är en vektor. (Detta är en finess i Matlab som är ett uttryck av att Matlab hela tiden tänker vektorer och matriser.) Utnyttja detta för att plotta funktionerna $\cos$, $\tan$, $\arctan$ och $\exp$ (Vad är den sista?) i intervallet $[0, 10]$.
   (c) Använd de parametriseringar vi fann tidigare för att plotta en cirkel, en ellips och kurvan $x^4 + y^4 = r^2$.
   (d) Plotta en cirkel med centrum i origo och plotta sedan bilden av denna efter att den linjära avbildningen $A = \left(\begin{smallmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ (för några olika k) har ‘deformerat’ den. Prova gärna också att t ex rotera den.
2. Titta återigen på teoriövningen ovan med biluthyrningsfirman. Antag att det från början fanns lika många bilar på Centralen, på Landvetter och som var uthyrda, d v s att $c_0 = l_0 = u_0 = 1/3$. Vad är fördelningen efter 1, 10, 100, 1000, 10000, 100000 veckor? Vad händer i de tre olika fallen då man i stället startar med alla bilar i var och en av de tre olika kategorierna?
3. Låt A vara en 5000×1000-matris, B en 1000×2000-matris samt $\mathbf{x}$ en 2000-vektor. Ta tiden på följande sätt att beräkna produkten $AB\mathbf{x}$: $(AB)\mathbf{x}$, $A(B\mathbf{x})$ samt $AB\mathbf{x}$ (d v s att låta Matlab bestämma ordningen). (Man kan använda paret tic/toc för att mäta tiden.) Kommentar, slutsats? Spelar det absolut ingen roll hur man sätter parenteserna?

Uppgift 4 bland teoriuppgifterna samt uppgift 2 bland datoruppgifterna ska redovisas skriftligt till Stefan. Sista inlämningsdag är måndagen den 14 februari. Instruktioner för redovisningen finns på hemsidan. Läs dessa noggrant!