Egenvektorer och egenvärden

Teoriövningar

1. Antag att en 3×3-matris A har egenvärdena $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 0.8$, $\lambda_3 = 0.6$ med motsvarande egenvektorer

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \ \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ och } \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Låt $\mathbf{v} = x_1\mathbf{v}_1 + x_2\mathbf{v}_2 + x_3\mathbf{v}_3$ vara en linjärkombination av de tre egenvektorerna.

(a) Vilka 3-vektorer kan skrivas som en linjärkombination av de tre egenvektorerna.

(b) Vad är $A^n\mathbf{v}_1$, $A^n\mathbf{v}_2$, $A^n\mathbf{v}_3$ respektive $A^n\mathbf{v}$ där n är ett godtyckligt heltal.

(c) Vad händer med $A^n\mathbf{v}$ då $n \to \infty$? Se upp, det beror lite på koefficienterna x_1, x_2 och x_3.

(d) Antag nu att vi har en 3×3-matris med några egenvärden λ_1, λ_2 och λ_3. Svara på förra frågan igen för den här lite mer godtyckliga matrisen.

(e) Hur kan man bestämma en matris A som har de egenvärden och egenvektorer som vi föreskrev från början. Ni behöver inte utföra beräkningarna. Det räcker med att ni ger en 'formel'. Tips: Det har något med diagonalisering att göra.

2. Ta reda på hur den så kallade potensmetoden och den nära relaterade inversiterationen fungerar. Dessa är metoder för att beräkna enstaka egenvärden och motsvarande egenvektor . Ett tips är att kolla på "Power iteration", "inverse iteration" och "Rayleigh quotient iteration" på engelskspråkiga wikipedia. Gå igenom och diskutera så att alla förstår hur det fungerar. Det hänger ihop med förra uppgiften, eller hur? Observera att potensmetoden är den metod som används för att beräkna Googles Pagerank och den är alltså en metod som fungerar bra då man har gigantiska (glesa) matriser.

3. Bestäm alla möjliga ON-matriser av storlek 2×2. Vad för typ av avbildningar är de.

Datorövningar

1. Vi återvänder till uppgiften om firman "Hyr ett vrak" som ni jobbade med på gruppövning 3. Bestäm med hjälp av egenvärden och egenvektorer hur fördelningen mellan bilar på Centralen, Landvetter och uthyrda är efter LÅNG tid. (Man kan beräkna egenvärden och egenvektorer med kommandot 'eig'.)

2. Om ni inte har gjort teoriövning 2 så är det dags att kolla på den nu. Skriv Matlab-funktioner som:

   (a) Givet en matris A och en precision p beräknar det största egenvärdet till A och motsvarande egenvektor med hjälp av potensmetoden med sådan precision att skillnaden mellan två på varandra följande Rayleigh-kvoter i iterationen är mindre än 10^{-p}. Tänk på att normalisera vektorerna. Kommandot 'norm($\mathbf{x}$)' ger längden av vektorn $\mathbf{x}$. Låt gärna precisionen vara ett valfritt argument och lägg in en standardprecision som används om man bara ger en matris. Antalet inparametrar kan man kontrollera med kommandot 'nargin'.

   (b) Givet en matris A, ett tal r och en precision p med hjälp av inversiteration beräknar det egenvärde som är närmast r och motsvarande egenvektor med sådan precision att skillnaden mellan två på varandra följande Rayleigh-kvoter i iterationen är mindre än 10^{-p}.

   Förutom att returnera egenvärde och egenvektor ska funktionerna också skriva ut hur många iterationer som krävdes. Testa era funktioner på några slumpmatriser (tag också gärna lite större sådana t ex 500×500) genom att jämföra med resultatet från Matlabs rutin 'eig' som beräknar alla egenvärden (inklusive icke-reella) med hjälp av den så kallade QR-faktoriseringen.

Uppgift 1 bland teoriuppgifterna samt uppgift 2 bland datoruppgifterna ska redovisas skriftligt till Stefan. Sista inlämningsdag är måndagen den 28 februari. Instruktioner för redovisningen finns på hemsidan. Läs dessa noggrant!