MATEMATIK
Chalmers Tekniska Högskola
Tentamen i Linjär algebra IT, TMV206, 2011-08-24.
Lösningar

1. (a) Vinkeln α mellan $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ uppfyller

$$\cos\alpha = \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\|} = \frac{-4}{\sqrt{14}\sqrt{11}} = -\frac{4}{\sqrt{154}}.$$

Alltså är $\alpha = \arccos\left(-\frac{4}{\sqrt{154}}\right)$.

(b) Arean A ges av längden av vektorprodukten mellan $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ så

$$A = \|\mathbf{u}\times\mathbf{v}\| = \left\| \begin{pmatrix} -11 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{138}.$$

2. Vi använder Gausselimination på totalmatrisen och får

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 2 & -1 & 4 \\ 2 & 5 & 2 & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 4 & -4 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & 9 & -10 \end{pmatrix}.$$

Detta ger $z = -10/9$, $y = -4-4(-10/9) = 4/9$ och $x = 3-10/9-2\cdot 4/9 = 1$.

3. Det finns oändligt många plan som innehåller den givna linjen. Det enda som krävs är att planets normal är vinkelrät mot riktningsvektorn för linjen och att det innehåller en punkt på linjen. Riktningsvektorn för linjen är $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}^t$ så vi kan t ex ta $\mathbf{n} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}^t$ som normal. Därmed får vi en ekvation på formen $x - z + D = 0$ där vi bestämmer D genom att utnyttja att punkten $P = (2, 1, 3)$ ligger på linjen (och därmed ska ligga på planet). Det ger $2 - 3 + D = 0$, så $D = 1$. Ett exempel på ett plan som uppfyller kriterierna är alltså $x - z + 1 = 0$.

4. (a) Den karakteristiska ekvationen är

$$0 = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} - x & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} - x \end{vmatrix} = \left(\frac{1}{2} - x\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = x^2 - x$$

som har lösningarna $x = 0$ och $x = 1$ som därmed är de två egenvärdena. Egenvektorerna får man genom att dels lösa $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ som ger multiplar av $\begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix}^t$ och dels

$$\mathbf{0} = A\mathbf{x} - \mathbf{x} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}\mathbf{x}$$

som har lösning alla multipler av $\begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}^t$. Vi har alltså att 0 är egenvärde med egenvektorer alla multiplar av $\begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix}^t$ och att 1 är egenvärde med egenvektorer alla multiplar av $\begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}^t$.

(b) De två egenvektorerna är ortogonala. Multipler av $\begin{pmatrix}1 & 1\end{pmatrix}^t$ är oförändrade och de ortogonala vektorerna avbildas på nollvektorn. Därmed är det ortogonal projektion på linjen genom origo med riktningsvektor $\begin{pmatrix}1 & 1\end{pmatrix}^t$.

5. Vi har att $\mathbf{e}_y$ är oförändrad och att xz-planet roterar i positiv led. Det ger att
$$A = \begin{pmatrix}\cos\pi/4 & 0 & -\sin\pi/4\\ 0 & 1 & 0\\ \sin\pi/4 & 0 & \cos\pi/4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2}\\ 0 & 1 & 0\\ 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2}\end{pmatrix}.$$
Spegling i yz-planet påverkar inte $\mathbf{e}_y$ och $\mathbf{e}_z$ medan $\mathbf{e}_x$ avbildas på $-\mathbf{e}_x$. Det ger att
$$B = \begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$
Den sökta matrisen är
$$C = BA = \begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2}\\ 0 & 1 & 0\\ 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2}\\ 0 & 1 & 0\\ 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2}\end{pmatrix}.$$

6. Det finns två olika vektorer, en som är roterad 45 grader moturs och en som är roterad 45 grader medurs jämfört med $\mathbf{v}$ (och sedan lämpligt skalad).

Matrisen för rotation vinkeln α (radianer) moturs är
$$R(\alpha) = \begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}$$
så de vektorer vi söker ges av $c\cdot R(\pi/4)\mathbf{v}$ respektive $c\cdot R(-\pi/4)\mathbf{v}$ där c är lämpligt vald för att få rätt längd. Vi får
$$\begin{aligned} c\cdot R(\pi/4)\mathbf{v} &= c\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 3\end{pmatrix} = \frac{c}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-2\\ 4\end{pmatrix} = c_1\begin{pmatrix}-1\\ 2\end{pmatrix}\\ c\cdot R(-\pi/4)\mathbf{v} &= c\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 3\end{pmatrix} = \frac{c}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}4\\ 2\end{pmatrix} = c_1\begin{pmatrix}2\\ 1\end{pmatrix}, \end{aligned}$$
där $c_1 = \sqrt{2}c$. För att få rätt längd väljer vi $c_1 = 2/\sqrt{5}$ så svaret är
$$\mathbf{u}_1 = \frac{2}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}-1\\ 2\end{pmatrix} \quad\text{och}\quad \mathbf{u}_2 = \frac{2}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}2\\ 1\end{pmatrix}.$$

7. Vi har att $A\mathbf{u} = \mu\mathbf{u}$ och $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$ med $\mu \neq \lambda$. Antag att $\mathbf{x} = s\mathbf{u} + t\mathbf{v}$ är en egenvektor till A med egenvärdet k. Vi ska nu visa att det ger en motsägelse och i så fall kan inte $\mathbf{x}$ vara en egenvektor.

Vårt antagande ger att $A\mathbf{x} = k\mathbf{x}$ så
$$A(s\mathbf{u} + t\mathbf{v}) = k(s\mathbf{u} + t\mathbf{v}) = (ks)\mathbf{u} + (kt)\mathbf{v}.$$
Men vi har också att
$$A(s\mathbf{u} + t\mathbf{v}) = s(A\mathbf{u}) + t(A\mathbf{v}) = (s\mu)\mathbf{u} + (k\lambda)\mathbf{v}.$$

Sätter vi dessa lika med varandra så får vi

$$s(k-\mu)\mathbf{u} = t(\lambda - k)\mathbf{v}.$$

Eftersom $\mu \neq \lambda$ så är $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ linjärt oberoende och speciellt är de inte parallella. Dessutom är förstås ingen av dem nollvektorn eftersom de är egenvektorer. Det betyder att ekvationen $s(k-\mu)\mathbf{u} = t(\lambda - k)\mathbf{v}$ ger att koefficienterna måste vara 0. Men $s \neq 0$ och $t \neq 0$ så det ger att

$$(k-\mu) = 0 = (\lambda - k) \Longleftrightarrow \mu = k = \lambda.$$

Detta motsäger antagandet att $\mu \neq \lambda$ och därmed är saken klar.