MATEMATIK
Chalmers Tekniska Högskola
Tentamen i Linjär algebra IT, TMV206, 2011-03-17.
Lösningar

1. Definitionen av skalärprodukt ger att om α är den sökta vinkeln så är

$$\cos\alpha = \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\|} = \frac{-3}{\sqrt{17}\sqrt{19}}.$$

Alltså är

$$\alpha = \arccos\left(\frac{-3}{\sqrt{323}}\right)$$

och eftersom argumentet är negativt så är vinkeln trubbig.

2. Låt S vara matrisen för speglingen och R vara matrisen för rotationen. Då gäller att den sökta matrisen ges av produkten RS. För speglingen gäller att $\mathbf{e}_x \mapsto -\mathbf{e}_y$ och $\mathbf{e}_y \mapsto -\mathbf{e}_x$ så bassatsen ger att

$$S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Matrisen för rotationen blir

$$R = \begin{pmatrix} \cos\pi/4 & -\sin\pi/4 \\ \sin\pi/4 & \cos\pi/4 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Svaret blir alltså

$$RS = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

3. Vi beräknar determinanten (med hjälp av Sarrus regel) för matrisen $M(a)$ som har de tre vektorerna som kolumner. Denna är 0 om och endast om vektorerna är linjärt beroende. Vi får att

$$\begin{vmatrix} 3 & -3 & 0 \\ 2 & a & -1 \\ 1 & -a & 1-a \end{vmatrix} = 9 - 6a - 3a^2 = -3(a^2 + 2a - 3).$$

Vi löser ekvationen $a^2 + 2a - 3 = 0$ och får lösningarna $a = -3$ och $a = 1$ vilket alltså är precis de två värden då vektorerna är linjärt beroende.

För att bestämma de efterfrågade linjärkombinationerna så löser vi de homogena ekvationsstystemen

$$M(a)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x\mathbf{v}_1 + y\mathbf{v}_2 + z\mathbf{v}_3 = \mathbf{0}$$

för $a=-3$ och $a=1$. Givet en icke-trivial sådan lösning kan vi ju lösa ut en av vektorerna som linjärkombination av de andra För $a=-3$ får vi

$$\begin{pmatrix}3&-3&0\\2&-3&-1\\1&3&4\end{pmatrix}\iff\begin{pmatrix}1&-1&0\\2&-3&-1\\1&3&4\end{pmatrix}\iff\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&-1&-1\\0&4&4\end{pmatrix}\iff\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

Den allmänna lösningen är $z=t$, $y=-t$ och $x=-t$. Om vi sätter $t=-1$ får vi att

$$\mathbf{0}=x\mathbf{v}_1+y\mathbf{v}_2+z\mathbf{v}_3=\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2-\mathbf{v}_3 \text{ så } \mathbf{v}_3=\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2.$$

För $a=1$ får vi

$$\begin{pmatrix}3&-3&0\\2&1&-1\\1&-1&0\end{pmatrix}\iff\begin{pmatrix}1&-1&0\\2&1&-1\\1&-1&0\end{pmatrix}\iff\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&3&-1\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

Den allmänna lösningen är $z=t$, $y=t/3$ och $x=t/3$. Om vi sätter $t=3$ får vi att

$$\mathbf{0}=x\mathbf{v}_1+y\mathbf{v}_2+z\mathbf{v}_3=\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2+3\mathbf{v}_3 \text{ så } \mathbf{v}_1=-\mathbf{v}_2-3\mathbf{v}_3.$$

4. (a) Vi löser den karakteristiska ekvationen och får

$$0=\det(A-\lambda I)=\begin{vmatrix}3-\lambda&-1\\-2&2-\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2-5\lambda+4=(\lambda-1)(\lambda-4).$$

Vi har alltså egenvärdena $\lambda_1=1$ och $\lambda_2=4$.
Egenvektorer för $\lambda_1=1$ är lösningar till homogena systemet med matris

$$A-\lambda_1 I=\begin{pmatrix}2&-1\\-2&1\end{pmatrix}\iff\begin{pmatrix}2&-1\\0&0\end{pmatrix} \text{ så } \mathbf{v}_1=t\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}.$$

Egenvektorer för $\lambda_2=4$ är lösningar till homogena systemet med matris

$$A-\lambda_2 I=\begin{pmatrix}-1&-1\\-2&-2\end{pmatrix}\iff\begin{pmatrix}-1&-1\\0&0\end{pmatrix} \text{ så } \mathbf{v}_2=t\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}.$$

(b) Vi har en diagonalisering av A som ser ut som

$$A=PDP^{-1}, \text{ där } P=\begin{pmatrix}\mathbf{v}_1&\mathbf{v}_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1\\2&-1\end{pmatrix} \text{ och } D=\begin{pmatrix}1&0\\0&4\end{pmatrix}.$$

Det ger att

$$\begin{aligned}A^n=PD^nP^{-1}&=\begin{pmatrix}1&1\\2&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1^n&0\\0&4^n\end{pmatrix}\frac{1}{-3}\begin{pmatrix}-1&-1\\-2&1\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}1&4^n\\2&-4^n\end{pmatrix}\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1&1\\2&-1\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1+2\cdot4^n&1-4^n\\2(1-4^n)&2+4^n\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

5. (a) Vi väljer två vektorer $\overrightarrow{PQ}$ och $\overrightarrow{PR}$ i planet och en normal $\mathbf{n}$ till planet ges av vektorprodukten av dessa

$$\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix}, \ \overrightarrow{PR} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -6 \end{pmatrix} \quad \text{så} \ \mathbf{n} = \overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR} = \begin{pmatrix} 21 \\ -6 \\ 13 \end{pmatrix}.$$

Det betyder att ekvationen för planet är på formen $21x - 6y + 13z + D = 0$ och vi bestämmer D genom att sätta in Q i formeln och får $D = -42 - 52 = -94$ så ekvationen är $21x - 6y + 13z - 94 = 0$. Kontroll med insättning av de tre punkterna ger att det stämmer.

(b) I avsnitt 1.6.3 i boken härleds formeln för avståndet från punkten (x, y, z) till planet $Ax + By + Cz + D = 0$ till

$$\frac{|Ax + By + Cz + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

vilket i detta fallet ger att avståndet är

$$\frac{|-94|}{\sqrt{21^2 + (-6)^2 + 12^2}} = \frac{94}{\sqrt{621}} = \frac{94}{3\sqrt{69}}.$$

Detta är ekvivalent med att ta längden av ortogonala projektionen av $\overrightarrow{OS}$ på normalen för någon punkt S i planet.

6. För att få fram den stationära fördelningen löser vi ekvationssystemet $(M^t - I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Vi multiplicerar systemet med 12 för att få heltal och får

$$\begin{aligned} 12(M^t - I) &= \begin{pmatrix} -10 & 3 & 5 \\ 5 & -8 & 6 \\ 5 & 5 & -11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -8 & 6 \\ -10 & 3 & 5 \\ 5 & 5 & -11 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 5 & -8 & 6 \\ 0 & -13 & 17 \\ 0 & 13 & -17 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -8 & 6 \\ 0 & -13 & 17 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Det ger att $z = 13t$, $y = 17t$ och $x = 58t/5$. Vi ska ha $x + y + z = 1$ vilket ger

$$1 = t\left(\frac{58}{5} + \frac{85}{5} + \frac{65}{5}\right) = t \cdot \frac{208}{5}$$

så $t = 5/208$ vilket ger att den stationära fördelningen är

$$\begin{pmatrix} \frac{58}{208} & \frac{85}{208} & \frac{65}{208} \end{pmatrix}.$$

7. (a) Vi ska visa att $f(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = f(\mathbf{x}) + f(\mathbf{y})$ och $f(k\mathbf{x}) = kf(\mathbf{x})$ för alla $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$ och $k \in \mathbb{R}$.

Observera att per definition är $f(\mathbf{x}+\mathbf{y})$ den unika vektor som ligger i π och för vilken $f(\mathbf{x} + \mathbf{y}) - (\mathbf{x} + \mathbf{y}) = c\mathbf{v}$ för något $c \in \mathbb{R}$. Men eftersom $f(\mathbf{x})$ och $f(\mathbf{y})$ ligger i π så ligger också $f(\mathbf{x}) + f(\mathbf{y})$ i π. Dessutom gäller att

$$f(\mathbf{x}) - \mathbf{x} = c_x\mathbf{v} \ \text{ och } \ f(\mathbf{y}) - \mathbf{y} = c_y\mathbf{v},$$

så om vi summerar dessa likheter får vi att

$$(f(\mathbf{x}) + f(\mathbf{y})) - (\mathbf{x} + \mathbf{y}) = (c_x + c_y)\mathbf{v}.$$

Alltså uppfyller $f(\mathbf{x}) + f(\mathbf{y})$ definitionen för $f(\mathbf{x} + \mathbf{y})$ och alltså är de lika.

För den andra likheten observerar vi på liknande sätt först att $f(k\mathbf{x})$ är den unika vektor som ligger i π och för vilken $f(k\mathbf{x}) - (k\mathbf{x}) = c\mathbf{v}$ för något $c \in \mathbb{R}$. Men eftersom $f(\mathbf{x})$ ligger i π så ligger också $kf(\mathbf{x})$ i π. Dessutom ger

$$f(\mathbf{x}) - \mathbf{x} = c_x\mathbf{v} \ \text{ att } \ (kf(\mathbf{x})) - (k\mathbf{x}) = (kc_x)\mathbf{v}.$$

Alltså uppfyller $kf(\mathbf{x})$ definitionen för $f(k\mathbf{x})$ och alltså är de lika. Därmed har vi visat att f är linjär.

(b) För en vektor $\mathbf{x}$ i planet gäller att $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$ så dessa är egenvektorer med egenvärdet 1. För en vektor $\mathbf{y} = k\mathbf{v}$ parallell med $\mathbf{v}$ gäller att $f(\mathbf{y}) = \mathbf{0} = 0\mathbf{y}$, ty $\mathbf{0} - \mathbf{y} = -k\mathbf{v}$. Dessa är alltså egenvektorer med egenvärdet 0. Vi har nu hittat en bas av egenvektorer för $\mathbb{R}^3$ och därmed finns det inga fler.

(c) Vi bestämmer matrisen med hjälp av bassatsen. Uppenbarligen är det så att $f(\mathbf{e}_x) = \mathbf{e}_x$ och $f(\mathbf{e}_y) = \mathbf{e}_y$. För $\mathbf{e}_z$ vet vi att $f(\mathbf{e}_z) = \begin{pmatrix} x & y & 0 \end{pmatrix}^t$ för något par (x, y) och

$$f(\mathbf{e}_z) - \mathbf{e}_z = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}.$$

Tredje koordinaten ger att $k = -1/c$, så $x = -a/c$ och $y = -b/c$. Alltså ges matrisen av

$$\begin{pmatrix} f(\mathbf{e}_x) & f(\mathbf{e}_y) & f(\mathbf{e}_z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{a}{c} \\ 0 & 1 & -\frac{b}{c} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$