MATEMATIK
Chalmers Tekniska Högskola
Tentamen i Linjär algebra IT, TMV206, 2011-03-17.
Hjälpmedel: Inga, ej heller räknedosa.
Telefonvakt: Urban Larsson, 0703-088304.

OBS: Motivera dina svar väl. Det är i huvudsak beräkningarna och motiveringarna som ger poäng inte svaret.
För betyget 3 krävs minst 25 poäng sammanlagt, för 4 krävs 35 poäng och för 5 krävs 45 poäng inklusive bonuspoäng.

---

1. Beräkna vinkeln mellan vektorerna
$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}.$$
Ange också (med motivering) om vinkeln är spetsig, trubbig eller rät. (6p)

2. Bestäm matrisen (i standardbasen) för den linjära avbildning i planet som består av spegling i linjen $y = -x$ följt av rotation $\pi/4$ radianer *moturs*. (6p)

3. Vi definierar tre vektorer
$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ a \\ -a \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1-a \end{pmatrix}.$$
   (a) Bestäm alla värden på parametern a för vilka de tre vektorerna är linjärt beroende.
   (b) Skriv en av vektorerna som en linjärkombination av de andra i alla fall då de tre vektorerna är linjärt beroende.

   (8p)

4. Låt
$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}.$$
   (a) Bestäm alla egenvärden och egenvektorer till A.
   (b) Beräkna A^n för godtyckligt heltal n.

   (8p)

5. Låt $P = (1, 3, 7)$, $Q = (2, 0, 4)$ och $R = (5, 4, 1)$.
   (a) Bestäm ekvationen på normalform för planet π som innehåller punkterna P, Q och R.
   (b) Bestäm minsta avståndet från origo till planet π.

   (6p)

Var god vänd!

6. Betrakta Markovkedjan med övergångsmatris

$$M = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 2 & 5 & 5 \\ 3 & 4 & 5 \\ 5 & 6 & 1 \end{pmatrix}.$$

   Bestäm den stationära fördelningen för denna Markovkedja. (6p)

7. Låt π vara ett plan i rummet genom origo och låt $\mathbf{v}$ vara en vektor som inte ligger i π. För varje vektor $\mathbf{x}$ finns det en unik vektor $f(\mathbf{x})$ som uppfyller

   - $f(\mathbf{x})$ ligger i planet π
   - $f(\mathbf{x}) - \mathbf{x} = c\mathbf{v}$ för något $c \in \mathbb{R}$

   Vi kallar $f(\mathbf{x})$ för projektionen av $\mathbf{x}$ på π längs riktningen $\mathbf{v}$ och detta ger en avbildning $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ som beror på $\mathbf{v}$ och π.

   (a) Visa att f är en linjär avbildning.

   (b) Ge alla egenvärden och egenvektorer för matrisen (i standardbasen) för f.

   (c) Bestäm matrisen för f i standardbasen om π är xy-planet (d v s $z = 0$) och $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix}^t$ med $c \neq 0$.

   Observera att det går att lösa deluppgifterna helt oberoende av varandra. (10p)

Tentorna beräknas vara färdigrättade den 31 mars. De kommer att delas ut vid lämpligt tillfälle som meddelas på kursens hemsida. Efter det kan tentorna avhämtas på expeditionen för Matematiska vetenskaper mellan 8:30 och 13:00 varje vardag.

LYCKA TILL! Stefan.