Sammanfattning föreläsning 11, Linjär algebra IT, VT2011

Antag att A är en övertriangulär eller undertriangulär matris med diagonalelement a_{ii}. Då gäller att $\det A = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$.

Det finns en unik determinant för $n \times n$-matriser och den ges av

$$\det A = \sum_{\pi \in S_n} \epsilon(\pi) a_{1\pi(1)} a_{2\pi(2)} \cdots a_{n\pi(n)},$$

där S_n är mängden av permutationer av $\{1, 2, \ldots, n\}$ och $\epsilon(\pi)$ är 1 eller -1 beroende på om π är jämn eller udda.

För alla matriser gäller

- $\det(A) = \det(A^t)$,
- $\det(AB) = \det(A)\det(B)$,
- $\det(A^{-1}) = \det(A)^{-1}$, om A är inverterbar.

Vektorerna $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ är linjärt oberoende om enda lösningen till

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \mathbf{v}_i = \mathbf{0}$$

är den triviala lösningen $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$. Om de inte är linjärt oberoende så säger vi att de är linjärt beroende.

Vektorerna $\mathbf{v}_1,\ \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ är linjärt beroende om och endast om en av dem kan uttryckas som en linjärkombination av de andra.

Låt A vara en $n \times n$-matris. En n-vektor $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ som är sådan att

$$A\mathbf{v} = \lambda \mathbf{v},\ \lambda \in \mathbb{R},$$

kallas för en egenvektor till A. Talet λ kallas för ett egenvärde till A.

Om $\mathbf{v}$ är en egenvektor till A med egenvärde λ och $c \neq 0$, så gäller att också $c\mathbf{v}$ är en egenvektor till A med egenvärde λ.

Antag att $\mathbf{v}$ är en egenvektor till A med egenvärdet λ, d v s $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$. Då gäller att $\mathbf{v}$ är en egenvektor till A^m för alla $m \in \mathbb{N}$ med egenvärdet λ^m, d v s

$$A^m \mathbf{v} = \lambda^m \mathbf{v}.$$

Om A är inverterbar så gäller också att $\mathbf{v}$ är en egenvektor till A^m med egenvärdet λ^m för alla negativa m. Speciellt är då

$$A^{-1}\mathbf{v} = \lambda^{-1}\mathbf{v} = \frac{1}{\lambda}\mathbf{v}$$

så A^{-1} har egenvektor $\mathbf{v}$ med egenvärde $1/\lambda$.