Sammanfattning föreläsning 12, Linjär algebra IT, VT2011

Vektorerna $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n)$ säges utgöra en bas för V om varje vektor $\mathbf{v} \in V$ kan skrivas som en unik linjärkombination av vektorerna $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n)$. Om $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n)$ är en bas och

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^{n} a_i \mathbf{v}_i$$

så säger vi att $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ är $\mathbf{v}$:s koordinater i basen $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n)$.
En mängd n-vektorer $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r$ utgör en bas för $\mathbb{R}^n$ om och endast om $r = n$ och de är linjärt oberoende.
Låt $\mathbf{f}_1,\ \mathbf{f}_2, \ldots, \mathbf{f}_n$ vara en bas för $\mathbb{R}^n$. Varje vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ kan skrivas som

$$\mathbf{x} = x_1\mathbf{f}_1 + x_2\mathbf{f}_2 + \cdots + x_n\mathbf{f}_n,$$

som på matrisform blir

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \mathbf{f}_1 & \mathbf{f}_2 & \ldots & \mathbf{f}_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = F\mathbf{x}_F,$$

där $\mathbf{x}_F$ är $\mathbf{x}$ koordinater i basen F. Formeln $\mathbf{x} = F\mathbf{x}_F$ är den viktiga formeln att komma ihåg när det gäller att byta baser.
För två godtyckliga baser

$$F = \begin{pmatrix} \mathbf{f}_1 & \mathbf{f}_2 & \cdots & \mathbf{f}_n \end{pmatrix} \text{ och } G = \begin{pmatrix} \mathbf{g}_1 & \mathbf{g}_2 & \cdots & \mathbf{g}_n \end{pmatrix}.$$

får vi

$$G\mathbf{x}_G = F\mathbf{x}_F \Longleftrightarrow \mathbf{x}_G = G^{-1}F\mathbf{x}_F \Longleftrightarrow \mathbf{x}_F = F^{-1}G\mathbf{x}_G.$$

Om $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ är en linjär avbildning, G en bas för $\mathbb{R}^m$ och $H = \begin{pmatrix} \mathbf{h}_1 & \mathbf{h}_2 & \cdots & \mathbf{h}_n \end{pmatrix}$ en bas för $\mathbb{R}^n$, så är matrisen för f relativt baserna G och H matrisen $A_{H\to G}$ som uppfyller

$$f(\mathbf{v})_G = A_{H\to G}\mathbf{v}_H.$$

Om $m = n$ och $G = H$ så är matrisen för f relativt basen G matrisen A_G som uppfyller

$$f(\mathbf{v})_G = A_G\mathbf{v}_G.$$

$$A_{H\to G} = \begin{pmatrix} f(\mathbf{h}_1)_G & f(\mathbf{h}_2)_G & \cdots & f(\mathbf{h}_n)_G \end{pmatrix}$$

Om en linjär avbildning $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ har matrisen A_G relativt basen G så har den matrisen

$$A_E = GA_GG^{-1}$$

relativt standardbasen.

Vi säger att en bas är en ortonormal bas, eller kortare ON-bas, om basvektorerna är parvis ortogonala och har längd 1.

En linjär avbildning från $f_A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ är isometrisk om den bevarar längder, d v s om

$$\|f_A(\mathbf{x})\| = \|A\mathbf{x}\| = \|\mathbf{x}\|\,,$$

för alla vektorer $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Motsvarande matris A säges vara en ON-matris.

En isometrisk linjär avbildning $f_A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ bevarar skalärprodukter, d v s

$$f(\mathbf{x}) \cdot f(\mathbf{y}) = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} \;\text{ eller }\; (A\mathbf{x}) \cdot (A\mathbf{y}) = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y}.$$

för alla vektorer $\mathbf{x}$ och $\mathbf{y}$.

Den kvadratiska matrisen A är en ON-matris om och endast om dess kolumner utgör en ON-bas.

Den kvadratiska matrisen A är en ON-matris om och endast $A^t = A^{-1}$.