Sammanfattning föreläsning 13, Linjär algebra IT, VT2011

Låt $G = (V, E)$ vara en graf med $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ så det finns n noder. Grannmatrisen till G, $A = A(G)$, är en $n \times n$-matris vars element defineras genom

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{om } \{v_i, v_j\} \in E, \\ 0 & \text{annars.} \end{cases}$$

Om $G = (V, E)$ är en riktad graf så defineras grannmatrisen till G genom

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{om } (v_i, v_j) \in E, \\ 0 & \text{annars.} \end{cases}$$

Om det finns väg mellan två noder i en graf med n noder så finns det väg av längd högst n mellan dessa.

Element (i, j) i A^k ger antalet vägar från nod i till nod j av längd k.

Finns väg från nod i till nod j om och endast om element (i, j) i $B = \sum_{k=1}^{n} A^k$ är positivt.

En graf är sammanhängande (riktad graf starkt sammanhängande) om och endast om alla element i $B = \sum_{k=1}^{n} A^k$ är positiva.

En slumpvandring på en graf är följande process: Om vi befinner oss i en nod v så beger vi oss sedan till någon av dess grannar med lika stor sannolikhet, d v s med sannolikheten $1/d(v)$.

Övergångsmatrisen M för slumpvandringen ges av

$$m_{ij} = a_{ij} \Big/ \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \ .$$

En fördelningsvektor är en radvektor sådan att summan av elementen är 1 och alla element är större än eller lika med 0. Denna beskriver sannolikheterna för att vi befinner oss i de olika noderna.

Om $\mathbf{x}_0^t$ är den ursprungliga fördelningsvektorn så gäller för fördelningsvektorn $\mathbf{x}_k^t$ efter k steg i slumpvandringen att $\mathbf{x}_k^t = \mathbf{x}_0^t M^k$.

En fördelningsvektor $\mathbf{x}^t$ är en stationär fördelning till en slumpvandring med övergångsmatris M om $\mathbf{x}^t M = \mathbf{x}^t$. Transponering ger $M^t \mathbf{x} = \mathbf{x}$ så $\mathbf{x}$ är en egenvektor till M^t med egenvärde 1. Kan bestämma $\mathbf{x}$ genom att lösa

$$M^t \mathbf{x} = \mathbf{x} \Longleftrightarrow (M^t - I)\mathbf{x} = \mathbf{0}.$$

(eller genom att multiplicera en vektor $\mathbf{x}$ med M^t tills det stabiliseras, eller läsa av raderna i M^n för någon "hög" potens n beroende på vilket som är med lämpligt i det givna fallet)