Sammanfattning föreläsning 3, Linjär algebra IT, VT2011

Formler för vektoroperationerna i termer av koordinater:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \\ z_1 + z_2 \end{pmatrix}$$

$$c \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cx_1 \\ cy_1 \\ cz_1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$$

$$\left\| \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}} = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1z_2 - z_1y_2 \\ z_1x_2 - x_1z_2 \\ x_1y_2 - y_1x_2 \end{pmatrix}$$

En matris är ett tvådimensionellt fält (array) med reella tal. En matris sägs vara av typ $m \times n$, eller en $m \times n$-matris, om den har m rader och n kolumner.
Summan av matriserna A och B, $C = A + B$, ges av $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$.
Produkten av A och k, $C = kA = Ak$, genom $c_{ij} = ka_{ij} = a_{ij}k$.
Produkten $A \cdot \mathbf{v}$ ges av

$$A \cdot \mathbf{v} = A\mathbf{v} = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \mathbf{a}_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = v_1\mathbf{a}_1 + v_2\mathbf{a}_2 + v_3\mathbf{a}_3.$$

Räkneregler för dessa operationer är

1. $A + B = B + A$ och $(A + B) + C = A + (B + C)$
2. $A(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = A\mathbf{u} + A\mathbf{v}$
3. $(A + B)\mathbf{v} = A\mathbf{v} + B\mathbf{v}$
4. $A(c\mathbf{v}) = c(A\mathbf{v}) = (cA)\mathbf{v}$

Fixera en 2×2-matris alternativt 3×3-matris A och låt V vara mängden av vektorer i planet alternativt mängden av vektorer i rummet beroende på storleken på A. Matrisavbildningen m a p A är då $f_A : V \longrightarrow V$

$$f_A(\mathbf{v}) = A\mathbf{v}.$$

Om A och B är 3×3-matriser så är $A \cdot B = AB = \begin{pmatrix} A\mathbf{b}_1 & A\mathbf{b}_2 & A\mathbf{b}_3 \end{pmatrix}$. För produkten $C = AB$ gäller att

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot b_{kj}, \quad \text{för} \quad 1 \leq i, j \leq n.$$

Räkneregler för matrismultiplikation

1. $A(cB) = c(AB) = (cA)B$
2. $A(B + C) = AB + AC$
3. $(B + C)A = BA + CA$
4. $A(B\mathbf{v}) = (AB)\mathbf{v}$
5. $A(BC) = (AB)C$

Observera dock att $AB \neq BA$ i allmänhet.
Transponatet av A, A^t, är den matris som har elementen

$$a^t_{ij} = a_{ji},$$

där a^t_{ij} är element (i, j) i A^t. En kvadratisk matris A är symmetrisk om $A = A^t$.

1. $(A^t)^t = A$
2. $(A + B)^t = A^t + B^t$
3. $(c \cdot A)^t = c \cdot A^t$
4. $(AB)^t = B^t A^t$