

Sammanfattning föreläsning 8, Linjär algebra IT, VT2011

En n -vektor, \mathbf{v} definieras som en ordnad n -tupel av reella tal och vi skriver

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}.$$

Mängden av alla n -vektorer betecknas med \mathbb{R}^n .

Operationer definieras i analogi med formlerna för geometriska vektorer i koordinatform så t ex

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \sum_{i=1}^n u_i v_i \quad \text{och} \quad \|\mathbf{u}\| = \sqrt{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}} = \sqrt{\sum_{i=1}^n u_i^2}.$$

Två vektorer \mathbf{u} och \mathbf{v} är *parallella* om det finns ett reellt tal $c \neq 0$ så att $c\mathbf{u} = \mathbf{v}$ och de är *ortogonala* om $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$.

Pythagoras sats: Två n -vektorer \mathbf{u} och \mathbf{v} är ortogonala om och endast om $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2$.

Standardbasen för \mathbb{R}^n är $E = \{\mathbf{e}_i : 1 \leq i \leq n\}$, där \mathbf{e}_i är den n -vektor som har koordinat i lika med 1 och övriga koordinater lika med 0. Varje vektor i \mathbb{R}^n kan skrivas som en unik linjärkombination av vektorerna i standardbasen.

Om A är en $m \times n$ -matris och \mathbf{v} en n -vektor så är produkten $A \cdot \mathbf{v}$ m -vektorn

$$A \cdot \mathbf{v} = A\mathbf{v} = (\mathbf{a}_1 \quad \mathbf{a}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{a}_n) \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n v_i \mathbf{a}_i.$$

Om A är en $m \times n$ -matris och B en $n \times p$ -matris så är produkten $A \cdot B$ $m \times p$ -matrisen

$$A \cdot B = AB = (A\mathbf{b}_1 \quad A\mathbf{b}_2 \quad \cdots \quad A\mathbf{b}_p).$$

På elementnivå blir det för $C = AB$, att

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} \cdot b_{kj}, \quad \text{för } 1 \leq i \leq m \quad \text{och} \quad 1 \leq j \leq p.$$

Fixera en $m \times n$ -matris A . Matrisavbildningen $\text{map } A$ är $f_A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ med $f_A(\mathbf{v}) = A\mathbf{v}$. Detta är en linjär avbildning och omvänt är varje linjär avbildning $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ en matrisavbildning med matris

$$A = (f(\mathbf{e}_1) \quad f(\mathbf{e}_2) \quad \cdots \quad f(\mathbf{e}_n))$$