Sammanfattning föreläsning 9, Linjär algebra IT, VT2011

Ett linjärt ekvationssystem med m ekvationer och n obekanta kan skrivas som $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ där A är en $m \times n$-matris.

Matrisen $T = \begin{pmatrix} A & \mathbf{b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 & \cdots & \mathbf{a}_n & \mathbf{b} \end{pmatrix}$ kallas för totalmatrisen för ekvationssystemet.

En matris som är sådan att alla rader har fler inledande nollor än alla rader ovanför säges vara på trappstegsform. Det första nollskilda elementet i en rad i en matris på trappstegsform kallas för ett pivotelement. En kolumn som innehåller ett pivotelement kallas för en pivotkolumn och en kolumn som inte innehåller ett pivotelement och som inte är sista kolumnen kallas för en fri kolumn.

De elementära radoperationerna är av följande tre typer:

1. Byta plats på två rader.
2. Multiplikation av en rad med ett tal skilt från noll.
3. Addition av en multipel av en rad till en annan rad.

De elementära radoperationerna på totalmatrisen ändrar inte lösningsmängden och de kan användas för att reducera totalmatrisen till trappstegsform.

Från trappstegsmatrisen kan man få fram samtliga lösningar till ekvationssystemet så här:

1. Om det finns pivotelement i sista kolumnen så saknas lösning.
2. Om det inte finns pivotelement i sista kolumnen så finns det lösningar och man hittar dem genom att:
   (a) Sätta alla variabler som svarar mot en fri kolumn till fria variabler.
   (b) Börja i sista raden och och gå uppåt och successivt lösa ut variablerna som svarar mot pivotelement uttryckt i konstanter och i de fria variablerna.

   Det finns oändligt många lösningar om det finns minst en fri kolumn och en *unik* lösning om det inte finns några fria kolumner.

För en kvadratisk matris A är följande utsagor ekvivalenta:

- Ekvationssystemet $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ har unik lösning för alla $\mathbf{b}$.
- Varje reduktion av A till trappstegsform saknar fria kolumner.
- Man kan reducera A till identitetsmatrisen med elementära radoperationer.
- Matrisen A är inverterbar.

Man kan bestämma inversen till A genom att göra elementära radoperationer på matrisen $[A\ I]$ så att slutprodukten blir $[I\ A^{-1}]$.