

MATEMATIK

Chalmers Tekniska Högskola

Tentamen i Linjär algebra IT, TMV206, 2012-08-30.

Lösningar

1. Vi använder Gausselimination på totalmatrisen och får

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 & -4 \\ 1 & -2 & 1 & -3 \\ 3 & 10 & 5 & 1 \end{pmatrix} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -3 \\ 3 & 2 & 4 & -4 \\ 3 & 10 & 5 & 1 \end{pmatrix} \\ \longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -3 \\ 0 & 8 & 1 & 5 \\ 0 & 16 & 2 & 10 \end{pmatrix} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -3 \\ 0 & 8 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Detta ger z fri, $y = (5 - z)/8$ och $x = -(7 + 5z)/4$.

2. (a) Vi får att

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 - 2 \\ -3 - 2 \\ -4 - 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ -10 \end{pmatrix}.$$

- (b) Per definition är arean av parallelogrammen lika med längden av $\mathbf{v} \times \mathbf{w}$ så

$$\text{Arean} = \sqrt{5^2 + 10^2} = 5\sqrt{5}.$$

- (c) Vi har att $\mathbf{n} = \mathbf{v} \times \mathbf{w}$ är normal till planet som spänns upp av $\mathbf{v}$ och $\mathbf{w}$ så vi får en vektor som har de efterfrågade egenskaperna om vi normaliserar denna:

$$\mathbf{e} = \frac{1}{\|\mathbf{n}\|} \mathbf{n} = \frac{1}{5\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ -10 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

3. Vi bestämmer de två vektorerna

$$\mathbf{u} = \overrightarrow{P_3 P_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ och } \mathbf{v} = \overrightarrow{P_3 P_2} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

som spänner upp planet. En normal till planet ges då av

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

vilket ger att planet har en ekvation på formen $x - y + d = 0$. För att bestämma d sätter vi in tex punkten P_3 och får $2 + d = 0$ och slutligen alltså att ekvationen är

$$x - y - 2 = 0.$$

4. Om vi betecknar den sökta matrisen med A så är villkoren att

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad A \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Direkt från definitionen av matrismultiplikation får vi att dessa två likheter kan kombineras till en matrisekvation

$$A \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{så} \quad A = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}^{-1}.$$

Detta ger en unik matris A och vi får att

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \frac{1}{6-5} \begin{pmatrix} 6 & -1 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 21 & -3 \\ 11 & -2 \end{pmatrix}.$$

5. (a) Vår startfördelning är $\mathbf{x}_0^t = (1/3 \quad 1/3 \quad 1/3)$ och vi får fördelningen $\mathbf{x}_1^t$ efter ett steg genom

$$\mathbf{x}_1^t = \mathbf{x}_0^t M = \left(\frac{1}{4} \quad \frac{1}{4} \quad \frac{1}{2} \right),$$

så sannolikheten att vara i nod a är $1/4$.

- (b) Efter ytterligare ett steg får vi fördelningen $\mathbf{x}_2^t$ som

$$\mathbf{x}_2^t = \mathbf{x}_1^t M = (11/48 \quad 11/48 \quad 13/24),$$

så sannolikheten att vara i nod b är $11/48$.

- (c) Den stationära fördelningen $\mathbf{x}$ uppfyller $\mathbf{x}^t = \mathbf{x}^t M$ vilket är ekvivalent med $M^t \mathbf{x} = \mathbf{x}$ som i sin tur är ekvivalent med $(M^t - I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Gausselimination ger

$$\begin{aligned} M^t - I &= \begin{pmatrix} -\frac{3}{4} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{4} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} -9 & 4 & 2 \\ 3 & -8 & 2 \\ 3 & 2 & -2 \end{pmatrix} \\ &\longleftrightarrow \begin{pmatrix} 3 & -8 & 2 \\ -9 & 4 & 2 \\ 3 & 2 & -2 \end{pmatrix} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} 3 & -8 & 2 \\ 0 & -20 & 8 \\ 0 & 10 & -4 \end{pmatrix} \\ &\longleftrightarrow \begin{pmatrix} 3 & -8 & 2 \\ 0 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} 3 & -3 & 0 \\ 0 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &\longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Den allmänna lösningen är $z = t$, $y = 2z/5 = 2t/5$ och $x = y = 2t/5$. Summan av elementen ska vara 1 så vi ska välja $t = 5/9$ och den sökta stationära fördelningen är $\mathbf{x}^t = (2/9 \quad 2/9 \quad 5/9)$.

6. Vi låter F vara matrisen som har $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2$ och $\mathbf{f}_3$ som kolonner. Då gäller att $\mathbf{x}$ koordinater i standardbasen, $\mathbf{x}_E$, och dess koordinater i F -basen, $\mathbf{x}_F$, uppfyller

$$\mathbf{x}_F = F^{-1} \mathbf{x}_E.$$

Eftersom F är en ON-matris så är $F^{-1} = F^t$. Vi beräknar först

$$\mathbf{f}_3 = \frac{1}{3\sqrt{2}} \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{3\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Vi får då

$$\mathbf{x}_F = F^{-1}\mathbf{x}_E = F^t\mathbf{x}_E = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \\ 2/3 & 2/3 & 1/3 \\ -1/3\sqrt{2} & -1/3\sqrt{2} & 4/3\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Kontrollera att det stämmer, d v s att $0 \cdot \mathbf{f}_1 + 2 \cdot \mathbf{f}_2 - 2\sqrt{2} \cdot \mathbf{f}_3$ har koordinaterna $(2, 2, -2)$:

$$0 \cdot \mathbf{f}_1 + 2 \cdot \mathbf{f}_2 - 2\sqrt{2} \cdot \mathbf{f}_3 = \frac{2}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{2}{3} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

7. (a) Vi utnyttjar att $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u}^t \mathbf{v}$ samt räkneregler för transponat och matrismultiplikation och får

$$(\mathbf{A}\mathbf{x}) \cdot \mathbf{y} = (\mathbf{A}\mathbf{x})^t \mathbf{y} = (x^t \mathbf{A}^t) \mathbf{y} = x^t (\mathbf{A}^t \mathbf{y}) = \mathbf{x} \cdot (\mathbf{A}^t \mathbf{y}).$$

- (b) Vi har att $\mathbf{A}\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u}$, $\mathbf{A}^t \mathbf{v} = \mu\mathbf{v}$ med $\lambda \neq \mu$. Om vi utnyttjar detta, så får vi

$$\begin{aligned} (\mathbf{A}\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} &= (\lambda\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} = \lambda(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) \\ \mathbf{u} \cdot (\mathbf{A}^t \mathbf{v}) &= \mathbf{u} \cdot (\mu\mathbf{v}) = \mu(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}). \end{aligned}$$

Enligt resultatet i första deluppgiften är första uttrycket i dessa rader lika så vi får att

$$\lambda(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) = \mu(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) \iff (\lambda - \mu)(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) = 0.$$

Eftersom $\lambda - \mu \neq 0$ så måste $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$ och alltså är de ortogonala.