

MATEMATIK

Chalmers Tekniska Högskola

Tentamen i Linjär algebra IT, TMV206, 2013-01-14.

Lösningar

1. (a) Grannmatrisen är

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

- (b) Antalet vägar från nod 1 till nod 3 ges av element $(1, 3)$ i $M^4 = (M^2)^2$. Vi beräknar först M^2 och sedan element $(1, 3)$ i M^4 . Det blir

$$M^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

och sedan blir element $(1, 3)$ i M^4 lika med 3.

2. (a) Arealen av parallelogrammen ges per definition av $\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\|$ och vi har

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1-10 \\ 20-2 \\ 4-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ 18 \\ 0 \end{pmatrix} = 9 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

arean blir

$$\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\| = 9\sqrt{(-1)^2 + 2^2 + 0^2} = 9\sqrt{5}.$$

- (b) Volymen av parallelepipeden ges av absolutbeloppet av matrisen som har $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ och $\mathbf{w}$ som kolumner. Vi får alltså att volymen är absolutbeloppet av

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & 2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \\ 5 & 1 & 2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -9 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -9 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -9.$$

Volymen är 9.

3. Man kan se det som en sammansättning av tre affina avbildningar. Först en translation med $\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ som flyttar P till origo, sedan rotation $\pi/6$ radianer moturs kring origo och slutligen translation med $\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$. Rotationen kring origo är en linjär avbildning och matrisen för denna är

$$R = \begin{pmatrix} \cos \pi/6 & -\sin \pi/6 \\ \sin \pi/6 & \cos \pi/6 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

Den sökta affina avbildningen ges alltså av

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) &= R(\mathbf{x} + \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}) + \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} = R\mathbf{x} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} \\ &= R\mathbf{x} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -3 - 2\sqrt{3} \\ 3\sqrt{3} - 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} = R\mathbf{x} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 - 2\sqrt{3} \\ 3\sqrt{3} - 8 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Vi får alltså

$$A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad \mathbf{b} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 - 2\sqrt{3} \\ 3\sqrt{3} - 8 \end{pmatrix}.$$

4. (a) De är ortogonala om och endast om skalärprodukten är noll. Vi får

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = 4 - 1 + 3x = 3x + 3,$$

så de är ortogonala om och endast $x = -1$.

- (b) Vi får en sökt vektor $\mathbf{e}$ genom att multiplicera $\mathbf{v}$ med inversen av dess längd, d v s

$$\mathbf{e} = \frac{1}{\|\mathbf{v}\|} \mathbf{v} = \frac{1}{\sqrt{14}} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

- (c) Den ortogonala projektionen $\mathbf{u}_L$ ges av

$$\mathbf{u}_L = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|^2} \mathbf{v} = \frac{3x + 3}{14} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

5. Vi använder Gausselimination på totalmatrisen och får

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & b & 0 \\ 0 & a+b & -1 & 2 \\ 3 & -6 & b+2 & a+6 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & b & 0 \\ 0 & a+b & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -2b+2 & a+6 \end{pmatrix}$$

Från detta ser vi att vi får en fri kolumn om och endast om $a + b = 0$ eller $-2b + 2 = 0$. Det första fallet ger $a = -b$ och det andra $b = 1$ och a godtycklig.

Om $b = 1$ så blir sista ekvationen $0 = a + 6$. Då måste $a = -6$ för att vi ska kunna ha någon lösning. Detta fallet ger lösningar eftersom det inte blir några problem med de två första ekvationerna. Vi får oändligt många lösningar med en fri parameter.

Om $a = -b$, så får vi

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & b & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 2-2b & 6-b \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 10-5b \end{pmatrix}$$

Denna har (oändligt många) lösningar om och endast om $10 - 5b = 0$, d v s $b = 2$.

Svaret är alltså: $(-6, 1)$ och $(-2, 2)$.

6. (a) Den tredje basvektorn $\mathbf{f}_3$ ska vara ortogonal mot $\mathbf{f}_1$ och $\mathbf{f}_2$ så alltså ortogonal mot planet. Alltså är $\mathbf{f}_3$ en enhetsvektor som är parallell

med en normal $\mathbf{n}$. Normalen kan vi läsa ut direkt från ekvationen och vi får

$$\mathbf{f}_3 = \frac{1}{\|\mathbf{n}\|} \mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{35}} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Vi kan välja $\mathbf{f}_1$ som vilken enhetsvektor som helst som är ortogonal mot $\mathbf{f}_3$ och sedan kommer $\mathbf{f}_3 \times \mathbf{f}_1$ att vara ortogonal mot dessa och ha längd 1 per definition av vektorprodukt. Dessutom kommer trippeln

$$(\mathbf{f}_3, \mathbf{f}_1, \mathbf{f}_3 \times \mathbf{f}_1)$$

att vara högerorienterad. Två platsbyten ger $(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_3 \times \mathbf{f}_1, \mathbf{f}_3)$ så även denna trippel är högerorienterad. Alltså ska vi välja $\mathbf{f}_2 = \mathbf{f}_3 \times \mathbf{f}_1$.

Vi får t ex

$$\mathbf{f}_1 = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad \mathbf{f}_2 = \frac{1}{\sqrt{350}} \begin{pmatrix} -15 \\ 5 \\ 10 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{14}} \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

- (b) Vi observerar att $\mathbf{x}$ är en normal till Π och alltså multipel av $\mathbf{f}_3$. Mer exakt är (eftersom $\mathbf{f}_3$ är en enhetsvektor)

$$\mathbf{x} = \|\mathbf{x}\| \mathbf{f}_3 = \sqrt{35} \mathbf{f}_3$$

så koordinaterna, $\mathbf{x}_F$, för $\mathbf{x}$ i basen F är (oberoende av valet av $\mathbf{f}_1$ och $\mathbf{f}_2$)

$$\mathbf{x}_F = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \sqrt{35} \end{pmatrix}.$$

7. (a) Den är reflexiv eftersom om vi väljer P att vara identitetsmatrisen så är $A = PAP^{-1}$ och därmed är A konjugerad med sig själv. Den är symmetrisk eftersom om $A = PBP^{-1}$ så är ju $B = P^{-1}AP$ så om A är konjugerad med B så är B konjugerad med A . Den är transitiv eftersom om $A = P_1BP_1^{-1}$ och $B = P_2CP_2^{-1}$, så är

$$A = P_1BP_1^{-1} = P_1P_2CP_2^{-1}P_1^{-1} = (P_1P_2)C(P_1P_2)^{-1}.$$

Med andra ord om A är konjugerad med B och B är konjugerad med C så är A konjugerad med C vilket precis är villkoret för transitiviteten. Eftersom den är reflexiv, symmetrisk och transitiv så är den per definition en ekvivalensrelation.

- (b) Antag att A och B är konjugerade och att λ är ett egenvärde till A . Det räcker att visa att då är λ ett egenvärde också till B , ty då är alla egenvärden till A egenvärden till B och omvändningen följer av symmetrin.

Vi antar alltså att $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$ för någon vektor $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ och $A = PBP^{-1}$ för en inverterbar matris P . Då får vi att

$$B(P^{-1}\mathbf{v}) = (P^{-1}AP)P^{-1}\mathbf{v} = P^{-1}A\mathbf{v} = P^{-1}\lambda\mathbf{v} = \lambda P^{-1}\mathbf{v},$$

så λ är alltså ett egenvärde till B med egenvektorn $P^{-1}\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$.