

MATEMATIK

Chalmers Tekniska Högskola

Tentamen i Linjär algebra IT, TMV206, 2012-03-08.

Lösningar

1. $P = (2, -1, 1)$ och $Q = (3, 1, 2)$

En riktningsvektor ges av

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 3 - 2 \\ 1 - (-1) \\ 2 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

så

$$\begin{cases} x = 2 + t \\ y = -1 + 2t \\ z = 1 + t \end{cases}$$

är en ekvation för linjen.

- (b) Det finns oändligt många plan som innehåller linjen och om vi tar ett plan med ekvationen $Ax + By + Cz + D = 0$ så ligger linjen på detta om och endast om

$$\begin{aligned} 0 &= A(2 + t) + B(-1 + 2t) + C(1 + t) + D \\ &= (A - B + C + D) + (A + 2B + C)t \end{aligned}$$

för alla t . Detta är ekvivalent med att

$$\begin{cases} A + 2B + C = 0 \\ 2A - B + C + D = 0 \end{cases}$$

Detta är ekvivalent med (vi subtraherar två gånger den första ekvationen från den andra)

$$\begin{cases} A + 2B + C = 0 \\ -5B - C + D = 0 \end{cases}$$

vilket har lösningarna $B = s$, $C = t$, $D = 5s + t$ och $A = -2s - t$ där s och t är fria parametrar. Ett exempel får vi om vi sätter $s = 0$ och $t = -1$:

$$x - z - 1 = 0.$$

Ett alternativt sätt att lösa den är att bestämma en normal $\mathbf{n} = (A \ B \ C)^t$, genom att ta $\mathbf{n} = \mathbf{v} \times \mathbf{w}$ där $\mathbf{w}$ är vilken vektor som helst, och sedan bestämma konstanten D genom att sätta in någon av de givna punkterna i ekvationen.

2. Den karakteristiska ekvationen ges av

$$0 = \begin{vmatrix} -7 - \lambda & -6 \\ 9 & 8 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \lambda - 2 = (\lambda + 1)(\lambda - 2),$$

så egenvärdena är de två nollställena -1 och 2 .

Sätter man in $\lambda = -1$ så får man ekvationen $-6x - 6y = 0$, vilket ger egenvektorererna $c \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Sätter man in $\lambda = 2$ så får man ekvationen $-9x - 6y = 0$, vilket ger egenvektorererna $c \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ (med lämplig normering för att få heltal).

3. Låt V vara matrisen som har vektorerna $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ och $\mathbf{v}_3$ som kolumner. Dessa utgör en bas om och endast de är linjärt oberoende vilket i sin tur är ekvivalent med att $V\mathbf{x} = \mathbf{b}$ har unik lösning för något (eller ekvivalent för alla) $\mathbf{b}$. Vi löser båda deluppgifterna på en gång genom att lösa ekvationssystemet

$$V\mathbf{x} = \mathbf{w}.$$

Om detta har unik lösning så utgör vektorerna i V en bas och per definition kommer $\mathbf{x} = \mathbf{w}_V$ att vara koordinaterna för $\mathbf{w}$ i basen V .

Vi använder Gausselimination på totalmatrisen och får

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 & 7 \\ -3 & -1 & 5 & 8 \\ 1 & -3 & 7 & -4 \end{pmatrix} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -3 & 7 & -4 \\ -3 & -1 & 5 & 8 \\ 2 & 4 & -1 & 7 \end{pmatrix} \\ \longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -3 & 7 & -4 \\ 0 & -10 & 26 & -4 \\ 0 & 10 & -15 & 15 \end{pmatrix} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -3 & 7 & -4 \\ 0 & -10 & 26 & -4 \\ 0 & 0 & 11 & 11 \end{pmatrix}.$$

Det ger en unik lösning (inga fria kolumner) och denna utgör koordinaterna för $\mathbf{w}$ i basen V . Vi löser ut variablerna successivt och får $x_3 = 1$, $-10x_2 = -4 - 26 = -30$ så $x_2 = 3$ och $x_1 = -4 - 7 + 3 \cdot 3 = -2$. Koordinaterna är alltså

$$\mathbf{w}_V = \mathbf{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

4. Vi har att $\cos \pi/4 = 1/\sqrt{2}$ så enligt definitionen av skalärprodukt så har vi

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}}{\|\mathbf{v}\| \|\mathbf{w}\|} = \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}}{3\|\mathbf{w}\|} \iff \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}}{\|\mathbf{w}\|}.$$

Man kan ansätta en godtycklig vektor $\mathbf{w} = (w_1 \ w_2 \ w_3)$ och sätta in i ekvationen. Det finns oändligt många lösningar och man kan tex välja att sätta $w_3 = 0$ och får då ekvationen

$$w_1^2 + w_2^2 - 16w_1w_2 = 0 \iff (w_1 - 8w_2)^2 = (\sqrt{63}w_2)^2 \iff w_1 = (8 \pm \sqrt{63})w_2$$

så att en möjlig lösning är

$$\mathbf{w} = \begin{pmatrix} 8 + \sqrt{63} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ett annat alternativ är att först bestämma en vektor $\mathbf{x}$ som är ortogonal mot $\mathbf{v}$ och som har samma längd. En vektor med den sökta egenskapen är

då $\mathbf{w} = \mathbf{v} + \mathbf{x}$ (eftersom $\mathbf{w}$ blir diagonalen i kvadraten som spänns upp av $\mathbf{v}$ och $\mathbf{x}$). Man kan tex ta

$$\mathbf{x} = \frac{3}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{så att} \quad \mathbf{w} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{3}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 + 3/\sqrt{2} \\ 2 - 3/\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ytterligare en möjlighet är att bestämma matrisen A för en linjär avbildning som roterar kring en axel som är ortogonal mot $\mathbf{v}$. Svaret blir då tex $\mathbf{w} = A\mathbf{v}$.

5. Om P är matrisen för projektionen och R är matrisen för rotationen så är den sökta matrisen $A = PR$.

För projektionen är $\mathbf{e}_x$ och $\mathbf{e}_z$ oförändrade och $\mathbf{e}_y$ avbildas på nollvektorn så

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

För rotationen är $\mathbf{e}_x$ oförändrad och rotationen är i positiv led om man betraktar yz -planet, dvs då $x = 0$. Formeln för matrisen för en rotation tillsammans med bassatsen ger då att

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \pi/4 & -\sin \pi/4 \\ 0 & \sin \pi/4 & \cos \pi/4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Därmed är den sökta matrisen

$$A = PR = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

6. (a) Vår startfördelning är $\mathbf{x}_0^t = (1/3 \ 1/3 \ 1/3)$ och vi får fördelningen $\mathbf{x}_2^t$ efter två steg genom

$$\mathbf{x}_2^t = \mathbf{x}_0^t M^2 = (13/30 \ 7/30 \ 1/3) M = (121/300 \ 73/300 \ 53/150),$$

så sannolikheten att vara i nod b är $73/300$.

- (b) Den stationära fördelningen $\mathbf{x}$ uppfyller $\mathbf{x}^t = \mathbf{x}^t M$ vilket är ekvivalent med $M^t \mathbf{x} = \mathbf{x}$ som i sin tur är ekvivalent med $(M^t - I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Gausselimination ger

$$\begin{aligned} M^t - I &= \frac{1}{10} \begin{pmatrix} -7 & 6 & 4 \\ 2 & -9 & 4 \\ 5 & 3 & -8 \end{pmatrix} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & -9 & 4 \\ -7 & 6 & 4 \\ 5 & 3 & -8 \end{pmatrix} \\ &\longleftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & -9 & 4 \\ -14 & 12 & 8 \\ 10 & 6 & -16 \end{pmatrix} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & -9 & 4 \\ 0 & -51 & 36 \\ 0 & 51 & -36 \end{pmatrix} \\ &\longleftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & -9 & 4 \\ 0 & -17 & 12 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Den allmänna lösningen är $z = t$, $y = 12t/17$ och $x = 20t/17$. Summan av elementen ska vara 1 så vi ska välja $t = 17/49$ och den sökta stationära fördelningen är $\mathbf{x}^t = (20/49 \ 12/49 \ 17/49)$.

7. (a) Villkoren att de tre punkterna ligger på kurvan är $a + bx_i + cx_i^2 = y_i$ för $i = 1, 2, 3$. Detta är tre linjära ekvationer med a, b och c som obekanta och på matrisform blir det

$$A\mathbf{u} = \mathbf{y}, \quad \text{där } A = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \\ 1 & x_3 & x_3^2 \end{pmatrix}, \mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \quad \text{och } \mathbf{u} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}.$$

- (b) Ekvationssystemet har unik lösning om och endast om $\det(A) \neq 0$ så vi beräknar $\det(A)$ och visar att den aldrig blir 0. Vi använder elementära radoperationer som kommer att ge oss en fin faktorisering automatiskt (som inte Sarrus regel ger i det här fallet).

$$\begin{aligned} \det(A) &= \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \\ 1 & x_3 & x_3^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 0 & x_2 - x_1 & x_2^2 - x_1^2 \\ 0 & x_3 - x_1 & x_3^2 - x_1^2 \end{vmatrix} \\ &= (x_2 - x_1)(x_3 - x_1) \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 0 & 1 & x_2 + x_1 \\ 0 & 1 & x_3 + x_1 \end{vmatrix} \\ &= (x_2 - x_1)(x_3 - x_1) \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 0 & 1 & x_2 + x_1 \\ 0 & 0 & x_3 - x_2 \end{vmatrix} \\ &= (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2). \end{aligned}$$

Denna produkt är skild från noll eftersom alla x -koordinaterna är olika. Därmed har ekvationssystemet alltid unik lösning och därmed finns det unik andragradskurva genom de tre punkterna.