

Tentamen i Linjär Algebra, TMV206.

2013-08-29, 8.30–12.30.

Hjälpmedel: Inga, ej räknedosa.

Telefon: Cornelia Jareteg, 0703-088304

Motivera väl dina lösningar och svar. Poäng ges inte för bara svaren, utan för fullständig förklaring av lösningarna.

Lösningar och besked om rättningen lämnas på kursens hemsida.

1. Avgör om följande vektorer är linjärt beroende och i så fall skriv en av vektorerna som en linjärkombination av de övriga: (6p)

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

2. [a] Bestäm avståndet mellan följande parallella linjer i planet $\mathbb{R}^2$: (5p)

$$3x + 4y = 1, \quad 3x + 4y = -19.$$

- [b] Bestäm en allmän formel för avståndet mellan två parallella plan i rummet: (2p)

$$Ax + By + Cz = D_1, \quad Ax + By + Cz = D_2.$$

3. En linje $\mathcal{L}$ passerar punkten $(1, 0, 1)$ och är ortogonal mot vektorerna

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Bestäm ekvationen för $\mathcal{L}$ på parameterform. (6p)

4. Låt f vara speglingen s i linjen $x = y$ följt av en rotation r på 60° moturs, dvs $f(\mathbf{v}) = r(s(\mathbf{v}))$ som avbildningar.

[a] Bestäm matrisen för f . (5p)

[b] f är också en spegling med avseende på en linje $\mathcal{L}$. Beskriv $\mathcal{L}$. (1p)

5. Låt

$$\mathbf{g}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{g}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

och $\mathcal{P}$ vara planet genom origo som spänns upp av $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2$. Låt f vara ortogonala projektionen på $\mathcal{P}$. Bestäm matrisen A för f (dvs f i standardbasen) och A 's samtliga egenvärden och egenvektorer.

(7p)

6. Låt $G = (V, E)$ vara grafen med de fyra noderna $V = \{1, 2, 3, 4\}$ och kanterna

$$E = \{\{1, 2\}, \{2, 2\}, \{1, 3\}, \{3, 3\}, \{1, 4\}, \{4, 4\}\}.$$

(G ser ut som en trehjulning). Bestäm en stationär fördelning för slumpvandringen på G .
(Ledning: Försök använda satser/resonemang om du kan.) (6p)

7. Matrisen A har tre egenvärden $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 0$, med motsvarande egenvektorer

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Bestäm A . (6p)

8. Låt A vara en diagonaliserbar $n \times n$ -matris. Bevisa att A^t är också diagonaliserbar med samma egenvärden som A . Har A och A^t samma egenvektorer? (Endast svar krävs.) (5+1p)

Lycka till! GZ