

Lösn.. Tentamen i Linjär Algebra, TMV206.

2013-03-14, 14.00–18.00.

För godkänt krävs minst 23 poäng (bonus inräknade). Betyg **3**: 23-32 p., **4**: 33-42 p., **5**: 43-58 p..

1. Svar: Linjärt oberoende.

Motivering: Det är tre vektorer i $\mathbb{R}^3$ och de är linjärt oberoende om och endast om de bildar en matrix A med $\det(A) \neq 0$. I det här fallet är

$$\det A = \det \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \end{bmatrix} = 3 \neq 0.$$

2. Svar: Skärningspunkten $(1, 0, 0)$, vinkeln $\theta = 60^\circ = \frac{\pi}{3}$.

Linjen L_1 resp. L_2 har riktningsvektor (skriven som radvektor här)

$$\mathbf{r}_1 = [1, 2, 2] - [1, 1, 1] = [0, 1, 1], \quad \mathbf{r}_2 = [2, 0, 1] - [0, 0, -1] = [2, 0, 2]$$

och därmed parametrisk form

$$[x, y, z] = [1, 1, 1] + s[0, 1, 1], \quad [x, y, z] = [0, 0, -1] + t[2, 0, 2].$$

Skärningspunkten bestäms ekv. systemet

$$[1, 1, 1] + s[0, 1, 1] = [0, 0, -1] + t[2, 0, 2].$$

dvs systemet med variablerna $\begin{bmatrix} s \\ t \end{bmatrix}$ och totalmatrisen T

$$s \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - t \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad T = \begin{bmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & -2 \end{bmatrix}$$

Detta har en entydig lösning $s = -1, t = \frac{1}{2}$, och den motsvarande skärningspunkten är $(x, y, z) = (1, 0, 0)$. Vinkeln θ mellan den två linjerna bestäms av inreprodukten av riktningsvektorerna ovan:

$$\cos \theta = \frac{\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2}{\|\mathbf{r}_1\| \|\mathbf{r}_2\|} = \frac{1}{2}, \quad \theta = 60^\circ = \frac{\pi}{3}.$$

3. Svar: $\frac{\sqrt{6}}{2}, Q = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 2)$.

Normalen till planet $x + y + 2z = 5$ är $[1, 1, 2]^t$ och avståndet är

$$\frac{|2 - 5|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 2^2}} = \frac{3}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{2}.$$

Normallinjen som passerar P har en ekvation (skriven som radvektorer) $[x, y, z] = [0, 0, 1] + s[1, 1, 2] = [s, s, 1 + 2s]$, och Q är skärningspunkten mellan normallinjen och planet, dvs den skall uppfylla

$$s + s + 2(1 + 2s) = 5, \quad s = \frac{1}{2}, \quad Q = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 2).$$

4. Lsn. En normaliserad normalvektor till planet är $\mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{6}}[1 \ 1 \ 2]^t$. Matrisen för speglingen är

$$A = I - 2\mathbf{n}\mathbf{n}^t = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & -2 \\ -2 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

och matrisen för speglingen relativt normallinjen är precis den negativa $-(I - 2\mathbf{n}\mathbf{n}^t) = -A$.

(Alternativt kan man använda formelerna $\mathbf{v} \rightarrow \mathbf{v} - 2(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n}$, $\mathbf{v} \rightarrow 2(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n} - \mathbf{v}$ för speglingarna.)

5. Svar: $A_G = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

Lsn. Bestäm koordinaterna för $f(\mathbf{g}_1)$ och $f(\mathbf{g}_2)$ m.a.p. basen G .

$$f(\mathbf{g}_1) = 2\mathbf{g}_1 = 2\mathbf{g}_1 + 0\mathbf{g}_2 = G \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad f(\mathbf{g}_2) = c_1\mathbf{g}_1 + c_2\mathbf{g}_2 = G\mathbf{c}, \quad \mathbf{c} = G^{-1}f(\mathbf{g}_2) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Matrisen A_G bildas av de två koordinatvektorena.

6. (a) Svar: $\mathbf{r} = [\frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n}]$.

Lsn. Vi får $r_1 = r_2 = \dots = r_n$ eftersom alla noder är likvärdiga. Då är $r_1 = r_2 = \dots = r_n = \frac{1}{n}$ ty deras summan är 1.

(b) Svar: $\mathbf{r} = [\frac{1}{2n-2}, \frac{2}{2n-2}, \dots, \frac{2}{2n-2}, \frac{1}{2n-2}]$.

Lsn 1. Beteckna $q = r_1$, dvs sannolikheten till den första noden i en stationär fördelning. Således är $r_n = r_1 = q$, eftersom grafen är symmetrisk i noderna 1 och n . Dessutom har den andra noden dubbla chanser att resa sig än den första noden så är $r_2 = 2r_1 = 2q$, såväl som $r_3 = \dots = r_{n-1} = 2q$. Men summan av de är 1, dvs $q + (n-2)2q + q = 1$, $q = \frac{1}{2n-2}$, nämligen $\mathbf{r} = [\frac{1}{2n-2}, \frac{2}{2n-2}, \dots, \frac{2}{2n-2}, \frac{1}{2n-2}]$.

Lsn 2. Vi använder den allmänna satsen (Sats 9.35) i textboken. Den totala antalet kanter är $2(n-1)$. Den 1:a och den n :te noden har **en** kant ansluten sig och den andra till den $(n-1)$:te har **två**. Då blir $\mathbf{r} = \frac{1}{2(n-1)}[1, 2, \dots, 2, 1]$.

(c). Svar: $\mathbf{r} = [\frac{1}{8}, \frac{3}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}]$.

Vi kan resonera som ovan. Säg sannolikheten $r_1 = q$ i fördelningsvektoren $\mathbf{r}$. Då har den 3:e och 4:e noderna dubbla chanser, dvs, $r_3 = r_4 = 2q$, medan den andra tre gånger mer, $r_2 = 3q$. Hela summan är $1 = q + 3q + 2q + 2q$, och $q = \frac{1}{8}$ och så bestämmer vi vektorn $\mathbf{r}$. Vi kan också använda den allmänna satsen: Här är totala antalet kanter 8, och så är $\mathbf{r} = \frac{1}{8}[1, 3, 2, 2]$

(Alternativt kan vi beräkna övergångsmatriserna för grafterna (a)-(b)-(c) och lös ekv.sys. $\mathbf{r} = \mathbf{r}M$. Men det är mycket beräkningar.)

7. Svar: $A^{-1} = \frac{1}{1+k^2} \begin{bmatrix} 1 & -k & -2^{-1}(1-k) \\ k & 1 & -2^{-1}(1+k) \\ 0 & 0 & 2^{-1}(1+k^2) \end{bmatrix}$, och $\lambda = 2$ är ett egenvärde med egenvektor

$$c[1+k, 1-k, 1+k^2]^t, \quad c \text{ kontant, fri}$$

Lsn 1. Vi påminner oss att en produkt av block-övertriangulär matriser är också triangulär. Skriv

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & \mathbf{a} \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad A_1 = \begin{bmatrix} 1 & k \\ -k & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Vi söker därför en invers av form

$$B = \begin{bmatrix} B_1 & \mathbf{b} \\ 0 & c \end{bmatrix}$$

där C är en 2×2 -matris, $\mathbf{v}$ en 2-vektor och d ett tal. Av $AB = I$ får vi $A_1 B_1 = I_2$, $2c = 1$, $A_1 \mathbf{b} + c\mathbf{a} = 0$. Således $B_1 = A_1^{-1}$, $c = 2^{-1}$, $\mathbf{b} = -2^{-1} A_1^{-1} \mathbf{a}$, dvs

$$B_1 = \frac{1}{1+k^2} \begin{bmatrix} 1 & -k \\ k & 1 \end{bmatrix}, c = 2^{-1}, \mathbf{b} = -2^{-1} \frac{1}{1+k^2} \begin{bmatrix} 1-k \\ 1+k \end{bmatrix}.$$

$\lambda = 2$ är ett egenvärde enligt produktformeln

$$\det(A - \lambda I_3) = \det \begin{bmatrix} A_1 - \lambda I_2 & \mathbf{a} \\ 0 & 2 - \lambda \end{bmatrix} = \det(A_1 - \lambda I_2)(2 - \lambda).$$

De motsvarande egenvektorer $\mathbf{v}$ bestäms av ekv.sys. $(A - 2I_3)\mathbf{v} = \mathbf{0}$.

Lsn 2. Radreducering på $[AI]$:

$$\begin{aligned} (A, I) &\sim \begin{pmatrix} 1 & k & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1+k^2 & 1+k & k & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & k & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1+k^2 & 0 & k & 1 & -\frac{1}{2}(1+k) \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \\ &\sim \begin{pmatrix} 1 & k & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{k}{1+k^2} & \frac{1}{1+k^2} & -\frac{1+k}{2(1+k^2)} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \\ &\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 - \frac{k^2}{1+k^2} & -\frac{k}{1+k^2} & -\frac{1}{2} + \frac{k(1+k)}{2(1+k^2)} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{k}{1+k^2} & \frac{1}{1+k^2} & -\frac{1+k}{2(1+k^2)} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = [I, A^{-1}]. \end{aligned}$$

(Den kan omskrivas med förenkelningar: $1 - \frac{k^2}{1+k^2} = \frac{1}{1+k^2}$, $-\frac{1}{2} + \frac{k(1+k)}{2(1+k^2)} = \frac{-1+k}{2(1+k^2)}$.)

8. Bevis 1. $A = PDP^{-1}$ och $D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$ enligt antagandet. Då är $\det(A) = \det(P) \det(D) \det(P^{-1}) = \det(P) \det(D) \det(P)^{-1} = \det(D) = \lambda_1 \lambda_2$

Bevis 2. $A - \lambda I = \begin{bmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{bmatrix}$, och $\det(A - \lambda I) = \lambda^2 - (a+d)\lambda + (ad - bc)$. Men A har två egenvärden λ_1, λ_2 så har $\det(A - \lambda I)$ två rötter, dvs $\det(A - \lambda I) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) = \lambda^2 - (\lambda_1 + \lambda_2)\lambda + \lambda_1 \lambda_2$. Jämför de två identiteter får vi $\lambda_1 \lambda_2 = ad - bc = \det A$.