

Tentamen i Linjär Algebra, TMV206.

2013-03-14, 14.00–18.00.

Hjälpmedel: Inga, ej räknedosa.

Telefon: Emil Gustavsson, 0703-088304

Motivera väl dina lösningar och svar. Poäng ges inte för bara svaren, utan för fullständig förklaring av lösningarna.

Lösningar och besked om rättningen lämnas på kursens hemsida.

1. Är följande vektorer linjärt beroende?

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Motivera ditt svar.

(6p)

2. En linje L_1 passerar $(1, 1, 1)$ och $(1, 2, 2)$, och en annan linje L_2 passerar $(0, 0, -1)$ och $(2, 0, 1)$. Avgör om de skär varandra och i så fall bestäm skärningspunkten mellan dem och den spetsiga vinkeln emellan.

(6p)

3. Bestäm avståndet från $P = (0, 0, 1)$ till planet $x + y + 2z = 5$ och den punkt Q på planet som ligger närmast P .

(6p)

4. Låt $\mathcal{P}$ vara planet $x + y + 2z = 0$ och $\mathcal{N}$ vara normallinjen som passerar origo.

[a] Bestäm matrisen för speglingen med avseende på $\mathcal{P}$.

[b] Bestäm matrisen för speglingen med avseende på normallinjen $\mathcal{N}$.

(4+3p)

5. Låt $\mathbf{g}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{g}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$, och $G = (\mathbf{g}_1 \ \mathbf{g}_2)$. Då bildar G en bas till planet $\mathbb{R}^2$. Låt f vara en linjär avbildning sådan att

$$f(\mathbf{g}_1) = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad f(\mathbf{g}_2) = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Bestäm matrisen A_G till f relativt basen G .

(6p)

6. Bestäm stationära fördelningarna för slumpvandringarna på följande (icke riktade) grafer (dvs bestäm radvektorerna $\mathbf{r} = [r_1 \ r_2 \ \cdots \ r_n]$ av sannolikheterna $r_1, \dots, r_n$, med $r_1 + \dots + r_n = 1$, sådant att $\mathbf{r}M = \mathbf{r}$, där M är övergångsmatriserna för)

(a) en n -cykel $G = (V, E)$, $V = \{1, 2, \dots, n\}$,

$$E = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \dots, \{n-1, n\}, \{n, 1\}\}$$

(b) en n -väg $G = (V, E)$, $V = \{1, 2, \dots, n\}$,

$$E = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \dots, \{n-1, n\}\}$$

(c) triangel med handtag $G = (V, E)$, $V = \{1, 2, 3, 4\}$,

$$E = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}, \{4, 2\}\}$$

(1+3+3p)

7. Betrakta följande 3×3 -matris

$$A = \begin{bmatrix} 1 & k & 1 \\ -k & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

[a] Bestäm inversen A^{-1} . (Tips: Behövs ej radreducera $[AI_3]$. Sök A^{-1} som har block-triangelär form som A .)

[b] Hitta ett egenvärde och tillhörande egenvektorer.

(6p)

8. Antag matrisen $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ är diagonaliserbar med två egenvärden λ_1, λ_2 . Bevisa att $\lambda_1 \lambda_2 = \det(A)$.

(6p)

Lycka till! GZ