

MATEMATIK

Chalmers Tekniska Högskola

Tentamen i Linjär algebra IT, TMV206, 2012-08-30.

Hjälpmedel: Inga, ej heller räknedosa.

Telefonvakt: Emil Gustavsson, 0703-088304.

OBS: Motivera dina svar väl. Det är i huvudsak beräkningarna och motiveringarna som ger poäng inte svaret.
För betyget 3 krävs minst 25 poäng sammanlagt, för 4 krävs 35 poäng och för 5 krävs 45 poäng inklusive bonuspoäng.

1. Lös ekvationssystemet

$$\begin{cases} 3x + 2y + 4z = -4 \\ x - 2y + z = -3 \\ 3x + 10y + 5z = 1 \end{cases}$$

med hjälp av Gausselimination.

(6p)

2. Låt $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ och $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

(a) Beräkna $\mathbf{v} \times \mathbf{w}$.

(b) Beräkna arean av den parallelogram som spänns upp av $\mathbf{v}$ och $\mathbf{w}$.

(c) Bestäm en enhetsvektor som är normal till planet som spänns upp av $\mathbf{v}$ och $\mathbf{w}$.

(8p)

3. Bestäm en ekvation på normalform för planet som innehåller punkterna $P_1 = (3, 1, 1)$, $P_2 = (6, 4, 4)$ och $P_3 = (2, 0, 1)$.

(7p)

4. Bestäm matrisen för den linjära avbildning som avbildar vektorn

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} \text{ på } \mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ och vektorn } \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix} \text{ på } \mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Motivera också att det bara finns en sådan linjär avbildning (så att *den* linjära avbildningen är motiverat).

(7p)

Var god vänd!

5. Betrakta en Markovkedja med tre noder a , b respektive c som har övergångsmatrisen

$$M = \begin{pmatrix} 1/4 & 1/4 & 1/2 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/6 & 1/6 & 2/3 \end{pmatrix}.$$

- (a) Antag att vi väljer startnod på måfå, d v s alla tre noderna med samma sannolikhet. Vad är sannolikheten att vi är i nod a efter 1 steg?
- (b) Antag att vi återigen väljer startnod på måfå. Vad är sannolikheten att vi är i nod b efter 2 steg?
- (c) Beräkna den stationära fördelningen.
6. En vektor $\mathbf{x}$ har koordinaterna $(2, 2, -2)$ i standardbasen. Bestäm dess koordinater i den högerorienterade ON-basen $(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3)$ där

$$\mathbf{f}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}_2 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad \mathbf{f}_3 = \mathbf{f}_1 \times \mathbf{f}_2$$

(uttryckt i standardbasen). Kontrollera också att du fått rätt svar (kontrollen ska redovisas och motiveras).

7. Låt A vara en $n \times n$ -matris.

- (a) Visa att $(A\mathbf{x}) \cdot \mathbf{y} = \mathbf{x} \cdot (A^t\mathbf{y})$ för alla n -vektorer $\mathbf{x}$ och $\mathbf{y}$.
- (b) Låt $\mathbf{u}$ vara en egenvektor till A , och $\mathbf{v}$ en egenvektor till A^t . Visa att om $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ svarar mot olika egenvärden så är de ortogonala mot varandra. Tips: Man kan ha nytta av resultatet i första deluppgiften och det är förstås OK att använda det även om man inte lyckats bevisa det.

Tentorna beräknas vara färdiggrättade den 10 september. Efter det kan tentorna avhämtas på expeditionen för Matematiska vetenskaper mellan 9:00 och 13:00 varje vardag.

LYCKA TILL!

Stefan.