

Linjer, plan m m

Uppgift 4 bland teoriuppgifterna samt uppgift 2 bland datoruppgifterna ska redovisas skriftligt enligt instruktionerna för redovisningen som finns på kurshemsidan. Läs och följ dessa noggrant. Sista inlämningsdag är måndagen den 17 februari.

Teoriövningar

1. Vi har sett att en linje i planet kan beskrivas antingen med en likhet $Ax + By + C = 0$ eller på parameterform

$$\begin{cases} x = x_0 + tv_x \\ y = y_0 + tv_y. \end{cases}$$

- (a) Gör samma sak för en cirkel med centrum i origo och radien r , d v s en likhet och en parametrisering som beskriver cirkeln.
 - (b) Gör samma sak för en cirkel med centrum i en godtycklig punkt (x_0, y_0) .
 - (c) Låt $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Betrakta bilden i u, v -planet av en cirkel (i x, y -planet) med centrum i origo under den linjära avbildningen $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Bestäm en parametrisering och en ekvation för denna bild.
2. Biluthyrningsfirman Hyr-Ett-Vrak har två kontor, ett på Centralen och ett på Landvetter. Av de bilar som är på Centralen i början av en vecka är 70% kvar där i början av veckan därpå, 10% finns på Landvetter och 20% är uthyrda. För Landvetter är motsvarande siffror att 60% är kvar på Landvetter, 10% är på Centralen och 30% är uthyrda. Av de som var uthyrda i början av en vecka är 50% det också veckan därpå, 30% är på Centralen och 20% på Landvetter. Låt c_n vara antalet bilar på Centralen vecka n , l_n antalet bilar på Landvetter vecka n och u_n antalet uthyrda bilar vecka n och låt

$$\mathbf{v}_n = \begin{pmatrix} c_n \\ l_n \\ u_n \end{pmatrix}.$$

Bestäm en matris A sådan att $\mathbf{v}_n = A\mathbf{v}_{n-1}$. Uttryck $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ och $\mathbf{v}_n$ i termer av $A, \mathbf{v}_0$ och n .

3. Hur många multiplikationer av par av tal krävs det för att multiplicera en $m \times n$ -matris med en $n \times p$ -matris?
4. Antag att vi är i $\mathbb{R}^3$. Här vet vi att lösningsmängden till ett linjärt ekvationssystem i tre obekanta variabler x, y, z kan vara av fem olika slag.
 - (a) En typ är "en punkt". En annan (mer urartad) typ är "hela rummet". Vilka är de tre andra?
 - (b) Vilka typer av lösningsmängd kan ett 2×3 system som

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$

ha? För de möjliga typerna, ge exempel (värden på $A_1, B_1, C_1, D_1, A_2, B_2, C_2, D_2$). Förklara även geometriskt, i termer av vektorerna (A_1, B_1, C_1) och (A_2, B_2, C_2) , när de olika fallen uppträder.

- (c) Motsvarande fråga för lösningsmängden till 3×3 system som

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \\ A_3x + B_3y + C_3z + D_3 = 0. \end{cases}$$

5. Kolla upp vad under- respektive övertriangulär matris betyder.

- (a) Vad händer om man multiplicerar en övertriangulär matris med en annan övertriangulär matris? Vad händer om man multiplicerar en undertriangulär matris med en annan undertriangulär matris? Vad händer om man multiplicerar en övertriangulär matris med en undertriangulär matris?
- (b) Visa att (nästan) varje 2×2 -matris $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ kan skrivas som en unik produkt $A = LU$, där

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ l & 1 \end{pmatrix} \text{ och } U = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & v \end{pmatrix}.$$

Bestäm L och U uttryckt i a , b , c och d . Vilka A kan inte skrivas som $A = LU$?

- (c) Vad har detta med Gausselimination att göra?

Datorövningar

- För att rita en kurva i Matlab använder man sig lämpligen av en parametrisering av kurvan. Det första man behöver då är en parameter t . Matlab gillar inte att man säger t ex "Låt t vara intervallet mellan 0 och 2π ", utan man får nöja sig med ett antal punkter i $[0, 2\pi]$.
 - Kolla vad kommandona $t = 0 : 10$, $t = 0 : 0.2 : \pi$ och $t = 0 : \pi/16 : \pi$ ger. Jämför slutvärdet på de två sista. Kommentarer?
 - Vad händer om du tar $\cos t$ där t är en vektor. (Detta är en finess i Matlab som är ett uttryck av att Matlab hela tiden tänker vektorer och matriser.) Utnyttja detta för att plotta funktionerna $\cos$, $\tan$, $\arctan$ och $\exp$ (Vad är den sista?) i intervallet $[0, 10]$.
 - Använd de parametriseringar vi fann tidigare för att plotta en cirkel, en ellips och kurvan $x^4 + y^4 = r^2$.
 - Plotta en cirkel med centrum i origo och plotta sedan bilden av denna efter att den linjära avbildningen $A = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (för några olika k) har 'deformerat' den. Prova gärna också att t ex rotera den.
- Titta återigen på teoriövningen ovan med biluthyrningsfirman. Antag att det från början fanns lika många bilar på Centralen, på Landvetter och som var uthyrda, d v s att $c_0 = l_0 = u_0 = 1/3$. Vad är fördelningen efter 1, 10, 100, 1000, 10000, 100000 veckor? Hur förändrar sig dessa fördelningar om alla bilar från början fanns på centralen?
- Låt A vara en 5000×1000 -matris, B en 1000×2000 -matris samt x en 2000-vektor. Ta tiden på följande sätt att beräkna produkten ABx : $(AB)x$, $A(Bx)$ samt ABx (d v s att låta Matlab bestämma ordningen). (Man kan använda paret tic/toc för att mäta tiden.) Kommentarer, slutsats? Spelar det absolut ingen roll hur man sätter parenteserna?