

Linjära ekvationssystem

Uppgift 2 bland teoriuppgifterna samt uppgift 3 bland datoruppgifterna ska redovisas skriftligt enligt instruktionerna för redovisningen som finns på kurshemsidan. **Läs och följ dessa noggrant.** Sista inlämningsdag är måndagen den 24 februari.

Teoriövningar

- Kolla upp vad ett *homogent* linjärt ekvationssystem är. Antag att vi har ett sådant med m ekvationer och n obekanta.
 - Vad händer med högerledsvektorn när man utför Gausselimination på systemet?
 - Kan det finnas en unik, oändligt många respektive inga lösningar till systemet om $m = n$?
 - Kan det finnas en unik, oändligt många respektive inga lösningar till systemet om $m < n$?
 - Kan det finnas en unik, oändligt många respektive inga lösningar till systemet om $m > n$?
- Betrakta 3×3 matriser. Ta reda på vad en "elementär matris" är, och speciellt hur den elementära matrisen svarande mot radoperationen "rad $n := \text{rad } n + a * \text{rad } k$ " ser ut.

- Överför matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 14 \end{pmatrix}.$$

till en matris U på trappstegsform (med andra ord övertriangulär) med Gausselimination, och ange de tre elementära matriserna som svarar mot de radoperationer som du gjorde.

- Skriv ner den matrisekvation som er Gausselimination innebär: I vänsterledet står din trappstegsmatris, i högerledet en produkt av A och elementära matriser.
 - Lös ut A i ekvationen och ange den faktorisering $A = LU$ ni får, där L är en undertriangulär matris med ettor på diagonalen och U är en övertriangulär matris.
- Antag att vi har en 3×5 -matris A och betrakta det linjära ekvationssystemet $Ax = b$. Antag också att första kolumnen i A inte bara består av nollor. Tänk er nu att vi använder elementära radoperationer för att omvandla A till trappstegsform.

- Vilka olika 'former' kan trappstegsformen ha? (Det finns 11st olika.) En 3×3 -matris med determinanten skild från noll t ex har 'trappstegsformen':



- Vilka kolumner har pivotelement respektive är fria variabler för de olika formerna?
- Hur många lösningar kan de olika formerna ha? Hur många parametrar har de om det finns oändligt många lösningar?

4. Betrakta ett linjärt ekvationssystem $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, där A är en 3×3 -matris med kolumnerna $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ och $\mathbf{a}_3$ och $\mathbf{x} = (x_1 \ x_2 \ x_3)^t$.
- Skriv produkten $A\mathbf{x}$ som en linjärkombination av kolumnerna i A .
 - Motivera att $A\mathbf{x} = \mathbf{a}_i$ har lösning för $1 \leq i \leq 3$. Ge en lösning i vart och ett av fallen.
 - Försök uttrycka med ord mängden av alla $\mathbf{b}$ sådana att $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ har någon lösning.
 - Samma fråga som förra deluppgiften för en godtycklig $m \times n$ -matris A .

Datorövningar

- Vi ska börja med att titta på 3 olika sätt att lösa ett linjärt ekvationssystem $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ när A är en kvadratisk matris. Det första sättet är att beräkna inversen till A ($=\text{inv}(A)$ i Matlab) och multiplicera med den på lämpligt sätt. Det andra sättet är Gauss-elimination (skrives $A \setminus \mathbf{b}$ i Matlab). Matlabs rutin är såpass smart att den upptäcker om A har någon speciell form, t ex om A redan är triangulär och utnyttjar i så fall detta. Det tredje sättet är att först LU -faktorisera A ($[L,U]=\text{lu}(A)$ i Matlab), d v s hitta triangulära matriser L och U sådana att $A = LU$. (I själva verket är inte L triangulär i allmänhet utan en triangulär matris som fått sina rader permuterade men det spelar ingen roll.) När man har LU -faktoriseringen kan man få lösningen genom att lösa två triangulära system. Hur då?
 - Bilda en 3×3 -matris A med slumptal och en 3-vektor $\mathbf{b}$ också med slumptal. Lös sedan systemet $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ med de tre olika metoderna och kolla att du får samma svar. Kolla också att svaret är rätt! Hur gör man det?
 - Vi ska nu jämföra hur lång tid de tre olika metoderna tar. Med hjälp av paret av kommandon `tic` och `toc` kan man mäta tiden. Detta fungerar bra åtminstone när man har tider på 1/10s och uppåt. Använd slumpmatriser och slumpvektorer och testa storlekar upp till 5000×5000 och gärna högre. För LU -faktorisering kolla dels hur lång tid faktoriseringen tar och dels hur lång tid bakåtsubstitutionen tar. Kommentarer?
 - När kan man tänka sig att det är effektivt att använda LU -faktorisering?
- I Matlab finns ett kommando 'rref' som utför Gauss(-Jordan) elimination på en matris. Använd den för att lösa övning 5.7 i boken.
- Vi ska nu se vad Matlab gör om man kör Gausselimination när koefficientmatrisen inte är kvadratisk. Ta 'rref' till hjälp för att svara på frågorna. Operatorn ' $A \setminus \mathbf{b}$ ' kallas för `mldivide` (matrix left division) i Matlab och ta en (grundlig) titt på hjälpen för `mldivide` innan du börjar.
 - Låt först A vara en (inte alltför stor) slumpmatris med fler rader än kolumner, $\mathbf{b}$ en slumpvektor med samma antal element som A 's antal rader. Låt Matlab lösa $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ med Gauss-elimination $A \setminus \mathbf{b}$. Vad ger Matlab för svar? Kolla om det är en lösning. Förklara vad Matlabs svar är?
 - Låt nu istället A ha fler kolumner än rader med $\mathbf{b}$ av matchande storlek. Vad ger Matlab för svar? Kolla om det är en lösning. Finns det fler lösningar? Beskriv kvalitativt lösningsmängden (en unik lösning, en linje, ett plan, ...?).