

## Egenvektorer och egenvärden

Uppgift 1 bland teoriuppgifterna samt uppgift 2 bland datoruppgifterna ska redovisas skriftligt enligt instruktionerna för redovisningen som finns på kurshemsidan. **Läs och följ dessa noggrant.** Sista inlämningsdag är måndagen den 3 mars.

### Teoriövningar

1. Antag att en  $3 \times 3$ -matris  $A$  har egenvärdena  $\lambda_1 = 1$ ,  $\lambda_2 = 0.8$ ,  $\lambda_3 = 0.6$  med motsvarande egenvektorer

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ och } \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Låt  $\mathbf{v} = x_1\mathbf{v}_1 + x_2\mathbf{v}_2 + x_3\mathbf{v}_3$  vara en linjärkombination av de tre egenvektorerna.

- (a) Vilka 3-vektorer kan skrivas som en linjärkombination av de tre egenvektorerna?
  - (b) Vad är  $A^n\mathbf{v}_1$ ,  $A^n\mathbf{v}_2$ ,  $A^n\mathbf{v}_3$  respektive  $A^n\mathbf{v}$  där  $n$  är ett godtyckligt heltal?
  - (c) Vad händer med  $A^n\mathbf{v}$  då  $n \rightarrow \infty$ ? Se upp, det beror lite på koefficienterna  $x_1$ ,  $x_2$  och  $x_3$ .
  - (d) Bestäm en matris  $A$  som har de egenvärden och egenvektorer som vi föreskrev ovan. Tips: Det har något med diagonalisering att göra.
2. Ta reda på hur den så kallade potensmetoden och den nära relaterade inversiterationen fungerar. Dessa är metoder för att beräkna enstaka egenvärden och motsvarande egenvektor. Ett tips är att kolla på "Power iteration", "inverse iteration" och "Rayleigh quotient iteration" på engelskspråkiga wikipedia. Gå igenom och diskutera så att alla förstår hur det fungerar. Det hänger ihop med förra uppgiften, eller hur? Observera att potensmetoden är den metod som används för att beräkna Googles Pagerank och den är alltså en metod som fungerar bra då man har gigantiska (glesa) matriser.
  3. Bestäm alla möjliga ON-matriser av storlek  $2 \times 2$ . Vad för typ av linjär avbildning motsvarar dessa matriser?

### Datorövningar

1. Vi återvänder till uppgiften om firman "Hyr ett vrak" som ni jobbade med på gruppövning 3. Bestäm med hjälp av egenvärden och egenvektorer hur fördelningen mellan bilar på Centralen, Landvetter och uthyrda är efter LÅNG tid. (Man kan beräkna egenvärden och egenvektorer med kommandot 'eig'.)
2. Om ni inte har gjort teoriövning 2 så är det dags att kolla på den nu. Skriv Matlab-funktioner som:
  - (a) Givet en matris  $A$  och en precision  $p$  beräknar det största egenvärdet till  $A$  och motsvarande egenvektor med hjälp av potensmetoden med sådan precision att skillnaden mellan två på varandra följande Rayleigh-kvoter i iterationen är mindre än  $10^{-p}$ . Förutom att returnera egenvärde och egenvektor ska funktionen också skriva ut hur många iterationer som krävdes. Redovisa en körning av programmet med matrisen från teoriuppgift 1(d) och precision  $10^{-5}$ .

- (b) Givet en matris  $A$ , ett tal  $r$  och en precision  $p$  med hjälp av inversiteration beräknar det egenvärde som är närmast  $r$  och motsvarande egenvektor med sådan precision att skillnaden mellan två på varandra följande Rayleigh-kvoter i iterationen är mindre än  $10^{-p}$ . Förutom att returnera egenvärde och egenvektor ska funktionerna också skriva ut hur många iterationer som krävdes. Redovisa en körning av programmet med matrisen från teoriuppgift 1(d), approximativt egenvärde  $r = 0.75$  och precision  $10^{-5}$ .

Tänk på normalisering: Multipler av en egenvektor är också en egenvektor! Kommandot `'norm(x)'` ger längden av vektorn  $x$ .

3. Variation på förra uppgiften: Låt precisionen vara ett valfritt argument och lägg in en standardprecision som används om man bara ger en matris. Antalet inparametrar kan man kontrollera med kommandot `'nargin'`.

Testa era funktioner på några slumpmatriser (tag också gärna lite större sådana t ex  $500 \times 500$ ) genom att jämföra med resultatet från Matlabs rutin `'eig'` som beräknar alla egenvärden (inklusive icke-reella) med hjälp av den så kallade QR-faktoriseringen.