

MATEMATIK

Chalmers Tekniska Högskola

Tentamen i Linjär algebra IT, TMV206, 2012-03-08.

Hjälpmedel: Inga, ej heller räknedosa.

Telefonvakt: Dawan Mustafa, 0703-088304.

OBS: Motivera dina svar väl. Det är i huvudsak beräkningarna och motiveringarna som ger poäng inte svaret.
För betyget 3 krävs minst 25 poäng sammanlagt, för 4 krävs 35 poäng och för 5 krävs 45 poäng inklusive bonuspoäng.

1. Låt $P = (2, -1, 1)$ och $Q = (3, 1, 2)$.

(a) Bestäm en ekvation (på parameterform) för den linje L som går genom punkterna P och Q .

(b) Bestäm en ekvation på normalform för ett plan som innehåller L . (8p)

2. Bestäm alla egenvärden och egenvektorer till

$$A = \begin{pmatrix} -7 & -6 \\ 9 & 8 \end{pmatrix}.$$

(7p)

3. Vi definierar tre vektorer som

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} \text{ och } \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

(a) Motivera att $V = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ är en bas för $\mathbb{R}^3$.

(b) Bestäm koordinaterna i basen V för vektorn

$$\mathbf{w} = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

(8p)

4. Låt $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Bestäm en vektor $\mathbf{w}$ sådan att vinkeln mellan $\mathbf{v}$ och $\mathbf{w}$ är $\pi/4$ radianer (45 grader). (6p)

Var god vänd!

5. Beräkna matrisen för den linjära avbildning i rummet som är rotation $\pi/4$ radianer runt x -axeln, i den riktning som bestäms av att positiva delen av y -axeln vrids mot positiva delen av z -axeln, följt av ortogonal projektion på xz -planet.

(8p)

6. Betrakta en Markovkedja med tre noder a , b respektive c som har övergångsmatrisen

$$M = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 6 & 1 & 3 \\ 4 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

- (a) Antag att vi väljer startnod på måfå, d v s alla tre noderna med samma sannolikhet. Vad är sannolikheten att vi är i nod b efter 2 steg?

- (b) Beräkna den stationära fördelningen.

(7p)

7. Givet tre punkter i planet (x_1, y_1) , (x_2, y_2) , (x_3, y_3) med olika x -koordinater så finns det en unik andragradskurva $y = a + bx + cx^2$ som går genom dessa tre punkter. Man kan bevisa detta med hjälp av linjär algebra och det är er uppgift att göra det genom att lösa följande delproblem.

- (a) Formulera påståendet att de tre punkterna ligger på en kurva $y = a + bx + cx^2$ som ett linjärt ekvationssystem på matrisform.

- (b) Visa att detta ekvationssystem alltid har en unik lösning (om alla x -koordinaterna är olika) genom att beräkna lämplig determinant. Tips: Använd elementära radoperationer istället för Sarrus regel för att beräkna determinanten. Mycket mer lämpligt i detta fallet.

(6p)

Tentorna beräknas vara färdigrättade den 22:e mars. De kommer att delas ut vid lämpligt tillfälle som meddelas på kursens hemsida. Efter det kan tentorna avhämtas på expeditionen för Matematiska vetenskaper mellan 9:00 och 13:00 varje vardag.

LYCKA TILL!

Stefan.