Lösningsförslag till tentamen i TMV206 Linjär algebra IT 2015-03-19

1. Lös det homogena ekvationssystemet $x_1\mathbf{v}_1 + x_2\mathbf{v}_2 + x_3\mathbf{v}_3 = \mathbf{0}$. Vi får en linje av lösningar: $t\begin{pmatrix}-1 & -1/2 & 1\end{pmatrix}^t$. Det följer att $\mathbf{v}_1 = -\frac{1}{2}\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3$, $\mathbf{v}_2 = -2\mathbf{v}_1 + 2\mathbf{v}_3$ och $\mathbf{v}_3 = \mathbf{v}_1 + \frac{1}{2}\mathbf{v}_2$.

2. Låt $V = \begin{pmatrix}\mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2\end{pmatrix}$ och $G = \begin{pmatrix}\mathbf{g}_1 & \mathbf{g}_2\end{pmatrix}$. Att dessa utgör två baser följer av att $\det V = 23 \neq 0$ och $\det G = -10 \neq 0$. Om f har matris A får vi att $A\mathbf{v}_1 = \mathbf{g}_1$ och $A\mathbf{v}_2 = \mathbf{g}_2$, det vill säga $AV = G$. Alltså blir $A = GV^{-1} = \ldots = \dfrac{1}{23}\begin{pmatrix}0 & 46\\ 5 & -22\end{pmatrix}$.

3. Vi ser en normalvektor till planet $\mathbf{n} = \begin{pmatrix}3 & -7 & -2\end{pmatrix}^t$ och en riktningsvektor för linjen $\mathbf{n} = \begin{pmatrix}4 & 2 & -1\end{pmatrix}^t$. Då $\mathbf{n}\cdot\mathbf{v} = \mathbf{0}$ drar vi slutsatsen att linjen är parallell med planet. Avståndet kan vi beräkna genom att välja (godtyckligt) en punkt $P_0 = (0, 0, -2)$ i planet och en punkt på linjen $P_1 = (3, 1, 5)$. Vi använder projektionsformeln för att projicera $\overrightarrow{P_0P_1} = \begin{pmatrix}3 & 1 & 7\end{pmatrix}^t$ på $\mathbf{n}$, och får det sökta avståndet till

$$\left\|\frac{\overrightarrow{P_0P_1}\cdot\mathbf{n}}{\|\mathbf{n}\|^2}\mathbf{n}\right\| = \frac{|\overrightarrow{P_0P_1}\cdot\mathbf{n}|}{\|\mathbf{n}\|} = 12/\sqrt{62}.$$

Då detta inte är 0, konstaterar vi att linjen inte skär planet.

4. Sätt $\mathbf{v}_0 = \begin{pmatrix}2 & 1 & -2\end{pmatrix}^t$. Vi ser att $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}_0 = 0$ och $\|\mathbf{u}\| = \|\mathbf{v}_0\| = 3$. Då $\tan(\pi/3) = \sqrt{3}$, följer att ett möjligt svar är

$$\mathbf{v} = \mathbf{u} + \sqrt{3}\mathbf{v}_0 = \begin{pmatrix}2 + 2\sqrt{3} & -2 + \sqrt{3} & 1 - 2\sqrt{3}\end{pmatrix}^t.$$

Att andra möjliga svar är korrekta kontrolleras genom $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = 3\|\mathbf{v}\|/2$.

5. Övergångsmatrisen för slumpvandringen ses vara

$$M = \begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 1\\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0\\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2}\\ 0 & 1 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

om vi ordnar noderna $0, P_x, P_y, P_z$. Svaret i (a) hittas som första elementet i fördelningsvektorn $\begin{pmatrix}\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4}\end{pmatrix}M^2$, vilket beräknas till $3/16$. För att finna den stationära fördelnigen i (b) löser vi egenvektorekvationen $M^t\mathbf{x} = \mathbf{x}$. Alla lösningar blir $t\begin{pmatrix}3 & 4 & 2 & 4\end{pmatrix}^t$. För att detta ska vara en fördelningsvektor väljer vi $t = 1/13$, vilket ger

$$\begin{pmatrix}3/13 & 4/13 & 2/13 & 4/13\end{pmatrix}^t.$$

6. Välj till exempel $\mathbf{g}_2 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}-2 & 2 & 1\end{pmatrix}^t$ och $\mathbf{g}_1 = \mathbf{g}_2 \times \mathbf{g}_3$, så att

$$G = (\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1 & -2 & 2\\ 2 & 2 & 1\\ -2 & 1 & 2\end{pmatrix}.$$

Bassatsen i bas G ger

$$A_G = (f(\mathbf{g}_1)_G, f(\mathbf{g}_2)_G, f(\mathbf{g}_3)_G) = \begin{pmatrix}0 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix},$$

eftersom $f(\mathbf{g}_1) = \mathbf{0} + \mathbf{g}_3 \times \mathbf{g}_1 = \mathbf{g}_2$, $f(\mathbf{g}_2) = \mathbf{0} + \mathbf{g}_3 \times \mathbf{g}_2 = -\mathbf{g}_1$ och $f(\mathbf{g}_3) = \mathbf{g}_3 + \mathbf{0}$. Bassatsen i standardbasen ger genom insättning av de tre standardbasvektorerna i den givna formeln att

$$A = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 4 & -4 & 7 \\ 8 & 1 & -4 \\ 1 & 8 & 4 \end{pmatrix}.$$

Alternativt kan basbytesformeln för linjära avbildningar användas: $A = GA_GG^{-1}$ där $G^{-1} = G^t$, då vi har en ON-bas. Från A_G ser vi direkt att f roterar $\pi/2$ kring $\mathbf{a}$, sett moturs från spetsen av $\mathbf{a}$.

7. Basbytesformeln $\mathbf{x} = G\mathbf{x}_G$, mellan koordinaterna $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}^t$ i standardbasen och koordinaterna $\mathbf{x}_G = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix}^t$ i basen G, används. Vi beräknar och använder

$$G^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -3 \\ -1 & -1 & 2 \\ -3 & -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Ekvationen för planet blir i standardbaskoordinater

$$5 = (2x_1 + 2x_2 - 3x_3) + 9(-x_1 - x_2 + 2x_3) - 3(-3x_1 - 2x_2 + 4x_3) = 2x_1 - x_2 + 3x_3.$$

En normalvektor blir alltså $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}^t$, och dess koordinater i basen G blir $\mathbf{x}_G = G^{-1}\mathbf{x} = \begin{pmatrix} -7 & 5 & 8 \end{pmatrix}^t$. Notera att $\begin{pmatrix} -7 & 5 & 8 \end{pmatrix}^t$ inte är parallell med $\begin{pmatrix} 1 & 9 & -3 \end{pmatrix}^t$. (Problemet: G är inte en ON-bas!)

8. Gör radoperationerna rad 1 := rad $1 - x_1 \cdot$ rad 3 och rad 2 := rad $2 - y_1 \cdot$ rad 3. Den sökta storheten ses vara

$$\det\begin{pmatrix} 0 & x_2 - x_1 & x_3 - x_1 \\ 0 & y_2 - y_1 & y_3 - y_1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 \\ y_2 - y_1 & y_3 - y_1 \end{pmatrix},$$

där vi i sista steget använt Sarrus regel och formeln för en 2×2-determinant. Alltså beräknas arean med tecken (beroende på orientering) av parallellogrammen $PQSR$, med kantvektorer $\overrightarrow{PQ}$ och $\overrightarrow{PR}$ och fjärde hörn S (motstående P).