Lösningsförslag till tentamen i TMV206 Linjär algebra IT 2015-04-13

1. Bassatsen och figur ger att f och g har matriserna $A = \begin{pmatrix} -1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix}$ och $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ respektive. De efterfrågade sammansatta linjära avbildningarna $g \circ f^{-1}$ och $f \circ g^{-1}$ har matriser BA^{-1} och AB^{-1} respektive, vilka båda beräknas till $\begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & 1/2 \\ 1/2 & -\sqrt{3}/2 \end{pmatrix}$. (Notera att i allmänhet är $AB^{-1} = (BA^{-1})^{-1}$. Att vi här råkar ha $AB^{-1} = BA^{-1}$ beror på att detta är en spegling.)

2. Låt $P = (5, 0, -1)$ och betrakta en punkt $Q = (1 + 3t, -1 - 2t, 2 + t)$ på den givna linjen, som ses ha riktningsvektor $\mathbf{v} = (4-1, -3-(-1), 3-2)^t$. Då det ortogonala avståndet är det minsta avståndet, söker vi t så att $\overrightarrow{PQ} \cdot \mathbf{v} = 0$. Med $\overrightarrow{PQ} = (3t-4, -2t-1, t+3)^t$ beräknas lösningen $t = 1/2$, som ger det sökta avståndet $\|\overrightarrow{PQ}\| = \sqrt{(3/2-4)^2 + 4 + (1/2+3)^2} = \sqrt{45/2}$.

3. Vektorerna är linjärt beroende precis då

$$0 = \det \begin{pmatrix} a & 1 & a^2 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = -\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ a & 1 & a^2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = -\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1-2a & a^2-a \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix} = 3a^2+a-2,$$

med lösningar $a = -1$ och $a = 2/3$. I båda fallen finner vi genom lösning av det homogena ekvationssystemet linjärkombinationen $(a, 1, -1)^t = 2(1, 2, 1)^t - 3(a^2, 1, 1)$.

4. Det karakteristiska ekvationen $\det \begin{pmatrix} 7-\lambda & -4 \\ -2 & 5-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 12\lambda + 27 = 0$ har lösningar $\lambda = 9$ och $\lambda = 3$. Genom lösning av de homogena ekvationssystemen i tur och ordning beräknas egenvektorer $t(2, -1)^t$ för $\lambda = 9$, och $t(1, 1)^t$ för $\lambda = 3$. Denna information ger diagonaliseringen

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1},$$

vilken ger oss potenser

$$A^n = 3^n \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3^n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = 3^{n-1} \begin{pmatrix} 1 + 2 \cdot 3^n & 2 - 2 \cdot 3^n \\ 1 - 3^n & 2 + 3^n \end{pmatrix}.$$

(Vi kontrollerar svaret för $n = 1$ och $n = 2$ åtminstone!)

5. Informationen ger skalärprodukter $\mathbf{g}_1 \cdot \mathbf{g}_1 = 1$, $\mathbf{g}_2 \cdot \mathbf{g}_2 = 2$, $\mathbf{g}_3 \cdot \mathbf{g}_3 = 4$, $\mathbf{g}_1 \cdot \mathbf{g}_2 = 1 \cdot \sqrt{2}/\sqrt{2} = 1$, $\mathbf{g}_1 \cdot \mathbf{g}_3 = 1 \cdot 2/2 = 1$ och $\mathbf{g}_2 \cdot \mathbf{g}_3 = 0$. Räkneregler för skalärprodukten ger

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = (\mathbf{g}_1 + \mathbf{g}_2 + 2\mathbf{g}_3) \cdot (-\mathbf{g}_1 + 3\mathbf{g}_2 + \mathbf{g}_3) = 14,$$

$\|\mathbf{u}\|^2 = \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = 25$ och $\|\mathbf{v}\|^2 = \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = 15$. Med detta beräknar vi vinkeln $\arccos(\frac{14}{5\sqrt{15}})$.

6. Vi beräknar vektorprodukten

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix},$$

vilken ses vara en normalvektor till planet. Projektionsformeln och vektorgeometri i figur ger formeln

$$f(\mathbf{v}) = \mathbf{v} - \frac{\mathbf{v} \cdot (1, 1, -2)^t}{6} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Denna formel och räkneregler för skalärprodukt visar att f är en linjär avbildning. Formeln och bassatsen ger också, genom insättning av basvektorerna i tur och ordning, matrisen

$$\begin{pmatrix} 5/6 & -1/6 & 1/3 \\ -1/6 & 5/6 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}.$$

7. Vi kan dela upp i två fall. Fall 1: $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \mathbf{0}$. Detta betyder precis att vektorerna är parallella. Fall 2: $\mathbf{u} \times \mathbf{v} \neq \mathbf{0}$. I detta fall är $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ två linjärt oberoende vektorer i ett plan med normalvektor $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$. Vektorn $\mathbf{w} = \mathbf{u} \times (\mathbf{u} \times \mathbf{v})$ ligger nu också i detta plan och är där ortogonal mot $\mathbf{u}$. Ekvationen betyder nu precis att $\mathbf{w}$ och $\mathbf{v}$ ska vara parallella. Från figur ser vi att detta är ekvivalent med att $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ ska vara ortogonala. Svaret blir alltså att lösningarna till ekvationen utgörs av alla par av vektorer som antingen är parallella eller ortogonala.

8. Övergångsmatrisen ses vara $M = \begin{pmatrix} 1-a & a \\ b & 1-b \end{pmatrix}$. Vi beräknar egenvärden till M^t. Ekvationen

$$\det \begin{pmatrix} 1-a-\lambda & b \\ a & 1-b-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 + ((a+b)/2 - 1)\lambda - (a+b)^2/4 = 0$$

har lösningarna $\lambda = 1$ och $\lambda = 1-a-b$. Vi beräknar även egenvektorerna till M^t med egenvärde 1, genom att lösa det homogena ekvationssystemet med totalmatris $\begin{pmatrix} -a & b & 0 \\ a & -b & 0 \end{pmatrix}$, vilket har lösningarna $t(b, a)^t$.

(a) Då antingen $a > 0$ eller $b > 0$ så följer att det finns en och endast en stationär fördelning $(b/(a+b), a/(a+b))$. Då $a = b = 0$ är $M = I$ och alla fördelningsvektorer är stationära, så dessa är alltså inte unika.

(b) Konvergens gäller uppenbarligen i fallet $a = b = 0$. Då $a > 0$ eller $b > 0$ har M^t två olika egenvärden. Därför finns en bas G av egenvektorer (där vi nedan antar att första basegenvektorn har egenvärde 1), och vi ser att

$$M^t = G \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1-a-b \end{pmatrix} G^{-1}.$$

Detta ger fördelningen

$$\mathbf{x}_0 M^n = \mathbf{x}_0 (G^{-1})^t \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (1-a-b)^n \end{pmatrix} G^t$$

efter n steg i Markovkedjan, och det följer i fallet $-1 < 1-a-b \leq 1$ att dessa fördelningar konvergerar, oavsett $\mathbf{x}_0$. Detta är inte fallet då $a = b = 1$ eftersom $(-1)^n$ är ± 1 beroende på om n är jämn eller udda. Svar: (a) Alla utom $a = b = 0$. (b) Alla utom $a = b = 1$.