**Lösningsförslag till tentamen i TMV206 Linjär algebra IT 2015-08-27**

1. Determinanten beräknas med Sarrus regel till $6a^2 - 23a + 15$. Lösningarna till $\det(M) = 0$ ses vara 3 och 5/6 genom kvadratkomplettering. Det är alltså för dessa $a$-värden systemet ej har entydig lösning. För exemplet i (b), tag till exempel $a = 3$ och en generisk vektor $\mathbf{b}$. Kontrollera olösbarheten genom att försöka lösa systemet.

2. Arean blir
$$\frac{1}{2}\left\|\left(\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}2\\1\\5\end{pmatrix}\right) \times \left(\begin{pmatrix}4\\6\\4\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}2\\1\\5\end{pmatrix}\right)\right\| = \sqrt{155}/2.$$

3. För att hitta en eventuell skärningspunkt löser vi ekvationssystemet
$$\begin{pmatrix}0\\1\\11\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}-1\\1\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\0\\4\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}4\\-1\\-1\end{pmatrix}.$$
Lösningen $(2, -1, 3)$ hittas. Med hjälp av skalärprodukt beräknas $\cos\alpha = -1/2$ för vinkeln $\alpha$ mellan riktningsvektorerna $(-1, 1, 4)^t$ och $(4, -1, -1)^t$. Med en figur inses att den sökta spetsiga vinkeln är $\pi/3$.

4. Lös matrisens karakteristiska ekvation. Detta ger egenvärdena $-1$ och $-4$. Lösning av två ekvationssystem för egenvektorerna ger motsvarande egenvektorer $(1, 2)^t$ och $(1, 3)^t$. (Vektorer parallella med dessa är också egenvektorer förstås.)

5. Normera först de givna vektorerna så de blir enhetsvektorer, och beräkna sedan $\mathbf{g}_1 = \mathbf{g}_2 \times \mathbf{g}_3$ med vektorprodukt. Vi får
$$\mathbf{g}_1 = \tfrac{1}{3\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\-1\\4\end{pmatrix}, \mathbf{g}_2 = \tfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}, \mathbf{g}_3 = \tfrac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}.$$
Koordinaterna för vektorn $\mathbf{v} = (1, 2, 3)^t$ blir, eftersom vi har en ON-bas, $a_1 = \mathbf{v}\cdot\mathbf{g}_1 = -1/\sqrt{2}$, $a_2 = \mathbf{v}\cdot\mathbf{g}_2 = 3$ och $a_3 = \mathbf{v}\cdot\mathbf{g}_3 = 3/\sqrt{2}$. (Den jobbiga vägen till detta är att lösa ett ekvationssystem.)

6. Det ska visas att matriselementen är positiva eller noll, och att alla tre radsummor är 1. Den stationära fördelningen blir $(58/208, 85/208, 65/208)$ genom att lösa systemet $(M^t - I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ och normera lösningen så att summan av koordinaterna är 1.

7. Ingen sådan matris $A$ finns eftersom $(2, 0, 1)$ är en linjärkombination av de två övriga vektorerna, och därför också måste vara en egenvektor med egenvärde 1. Dess egenvärde kan ju inte både vara 2 och 1!

8. Se Fråga 8 på Tentan Mars 2009.