

MATEMATIK

Chalmers Tekniska Högskola

Tentamen i Linjär algebra IT, TMV206, 2015-03-19

Hjälpmedel: Inga, ej heller räknedosa.

Examinator: Andreas Rosén

Telefonvakt: Tim Cardilin, 0703-088304

OBS: För betyget 3 krävs minst 20 poäng sammanlagt, för 4 krävs 30 poäng och för 5 krävs 40 poäng, inklusive bonuspoäng från duggor i Maple-TA.

Räkningarna och resonemangen ska redovisas och vara noggrant förklarade. Lösningarna ska vara välskrivna och avslutas med tydligt svar som är förenklat så långt som möjligt.

Lösningar och besked om rättning och granskning lämnas på kursens hemsida.

1. Betrakta vektorerna

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Skriv, om möjligt, $\mathbf{v}_1$ som en linjärkombination av de båda andra vektorerna. Gör också samma sak för $\mathbf{v}_2$ och $\mathbf{v}_3$.

(6p)

2. Betrakta vektorerna

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{g}_1 = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{g}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Visa att $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ utgör en bas, och att även $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2$ utgör en bas. Bestäm matrisen, i standardbasen, för den linjära avbildning f som avbildar $f(\mathbf{v}_1) = \mathbf{g}_1$ och $f(\mathbf{v}_2) = \mathbf{g}_2$.

(6p)

3. Avgör om linjen

$$\begin{cases} x = 3 + 4t \\ y = 1 + 2t \\ z = 5 - t \end{cases}$$

skär planet $3x - 7y - 2z = 4$. Beräkna skärningspunkten om de skär, och beräkna avståndet mellan dom om de inte skär.

(6p)

4. Betrakta vektorn

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Beräkna en vektor $\mathbf{v}$ sådan att vinkeln mellan $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ är $\pi/3$.

(6p)

Var god vänd!

5. Betrakta tetraedern med hörn i origo $O = (0, 0, 0)$, $P_x = (1, 0, 0)$, $P_y = (0, 1, 0)$ och $P_z = (0, 0, 1)$. Vi studerar slumpvandring på den riktade grafen $G = (V, E)$ med noder $V = \{O, P_x, P_y, P_z\}$ och kanter

$$E = \{(P_x, O), ((P_y, O), (O, P_z), (P_x, P_y), (P_y, P_z), (P_z, P_x))\}.$$

- (a) Vi väljer startnod på måfå, det vill säga alla noder med samma sannolikhet. Beräkna sannolikheten att vi efter två steg är i origo.
 (b) Beräkna den stationära fördelningen. (6p)

6. Betrakta den linjära avbildningen

$$f(\mathbf{v}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{v})\mathbf{a} + \mathbf{a} \times \mathbf{v}, \quad \text{där } \mathbf{a} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

- (a) Bestäm en höger ON-bas $G = (\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3)$, där $\mathbf{g}_3 = \mathbf{a}$.
 (b) Beräkna matrisen A_G för f i basen G , och beräkna matrisen A för f i standardbasen.
 (c) Förklara vad f åstadkommer geometriskt, på ett kort men detaljerat sätt. (6p)

7. Betrakta planet π som med koordinater y_1, y_2, y_3 i basen $G = (\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3)$, där

$$\mathbf{g}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{g}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{g}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

beskrivs av ekvationen

$$y_1 + 9y_2 - 3y_3 = 5.$$

Beräkna koordinaterna, i basen G , för en normalvektor till π . (7p)

8. Betrakta tre punkter $P = (x_1, y_1)$, $Q = (x_2, y_2)$, $R = (x_3, y_3)$ i planet. Vad beräknar

$$\det \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

uttryckt i termer av P , Q och R ? Svaret ska inte på något sätt använda sig av tredimensionella begrepp såsom volym, utan enbart vara i termer av tvådimensionella begrepp. Bevisa ditt påstående. (7p)