MATEMATIK
Chalmers Tekniska Högskola
Tentamen i Linjär algebra IT, TMV206, 2015-04-13
Hjälpmedel: Inga, ej heller räknedosa.
Examinator: Andreas Rosén
Telefonvakt: Christoffer Standar, 0703-088304

OBS: För betyget 3 krävs minst 20 poäng sammanlagt, för 4 krävs 30 poäng och för 5 krävs 40 poäng, inklusive bonuspoäng från duggor i Maple-TA.
Räkningarna och resonemangen ska redovisas och vara noggrant förklarade. Lösningarna ska vara välskrivna och avslutas med tydligt svar som är förenklat så långt som möjligt.
Lösningar och besked om rättning och granskning lämnas på kursens hemsida.

---

1. Låt f vara den linjära avbildning av planet som roterar moturs vinkeln $2\pi/3$ kring origo. Låt g vara den linjära avbildning av planet som speglar i linjen $x + y = 0$.
   (a) Bestäm matrisen för den sammansatta avbildning som först avbildar med f:s invers och sedan med g.
   (b) Bestäm matrisen för den sammansatta avbildning som först avbildar med g:s invers och sedan med f. (6p)

2. Beräkna avståndet från punkten $(5, 0, -1)$ till den räta linjen som går genom punkterna $(1, -1, 2)$ och $(4, -3, 3)$. (6p)

3. Avgör för vilka reella värden på a som de tre vektorerna
$$\begin{pmatrix} a \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a^2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$
   är linjärt beroende, och skriv i vart och ett av dessa fall en av vektorerna som en linjärkombination av de övriga. (6p)

4. Betrakta matrisen $A = \begin{pmatrix} 7 & -4 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$.
   (a) Bestäm alla egenvärden och egenvektorer till A.
   (b) Beräkna A^n för alla heltal n. (6p)

Var god vänd!

5. Antag att $G = (\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3)$ är en bas där $\|\mathbf{g}_1\| = 1$, $\|\mathbf{g}_2\| = \sqrt{2}$, $\|\mathbf{g}_3\| = 2$ och vinkeln $\angle \mathbf{g}_1\mathbf{g}_2$ är $\pi/4$, vinkeln $\angle \mathbf{g}_1\mathbf{g}_3$ är $\pi/3$ och vinkeln $\angle \mathbf{g}_2\mathbf{g}_3$ är $\pi/2$. Låt $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ vara de vektorer som i basen G har koordinater

$$\mathbf{u}_G = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \text{och} \qquad \mathbf{v}_G = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Beräkna vinkeln $\angle \mathbf{uv}$ mellan dessa vektorer $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$. (6p)

6. Låt f vara den avbildning av rummet som projicerar ortogonalt på det plan som innehåller origo, $(1, 1, 1)$ och $(2, 0, 1)$.

   (a) Visa att f är en linjär avbildning.

   (b) Bestäm f:s matris (i standardbasen). (6p)

7. Låt $\mathbf{u}$ vara en given enhetsvektor i rummet. Beskriv vilka vektorer $\mathbf{v}$ i rummet som uppfyller

$$\Big(\mathbf{u} \times (\mathbf{u} \times \mathbf{v})\Big) \times \mathbf{v} = \mathbf{0}.$$

(7p)

8. Betrakta Markovkedjan med två noder v_1 och v_2, där sannolikheten att gå från v_1 till v_2 är a och sannolikheten att gå från v_2 till v_1 är b. (Sannolikheten att stanna kvar i en nod är alltså i allmänhet nollskild.) Bestäm övergångsmatrisen och avgör med hjälp av denna följande.

   (a) För vilka $0 \leq a \leq 1$ och $0 \leq b \leq 1$ finns det en unik stationär fördelning?

   (b) För vilka $0 \leq a \leq 1$ och $0 \leq b \leq 1$ närmar sig Markovkedjan (konvergerar Markovkedjan mot) en stationär fördelning efter lång tid, oavsett startfördelning? (7p)