LINJÄRA OCH AFFINA AVBILDNINGAR

GRUPPÖVNING OCH DATORLABORATION 1

TMV206 - LINJÄR ALGEBRA (VT 2018)

Instruktioner

Allt material nedan **ingår i tentamen**.

Uppgift 2 bland teoriuppgifterna samt uppgift 3 bland datoruppgifterna ska redovisas skriftligt. **Deadline för inlämningen är 5/2 (tisdagsgrupper), respektive 6/2 (onsdagsgrupper), kl. 13**. Dessutom ska gruppen muntligt kunna redovisa dessa två uppgifter 13/2, respektive 14/2, och stå till svars för inlämningen.

Varje grupp redovisar gemensamt genom att lämna in lösning av teoriuppgiften i en .pdf-fil (alternativt doc/docx/odt/tex/jpg), matlabkod (.m-fil) och plottar via kursens aktivitet i PingPong. Se till att första raderna både i .pdf-filen och i .m-filen lyder: "% Grupp X, gruppövning 1", där X ersätts med ert gruppnummer, följt av en lista över CID för (aktiva) gruppmedlemmar.

Teoriuppgiften: Det krävs lösningar som är fullständiga med förklaringar och motiveringar. Endast en mängd formler och uträkningar duger inte. Läraren ska inte behöva tolka lösningen. Bara genom att läsa lösningen ska ert resonemang framgå. Lösningen ska börja med en formulering av problemet och avslutas med att det tydligt framgår vad svaren på **alla** de ställda frågorna är.

Matlabuppgiften: Det krävs en .m-fil med en väl kommenterad och strukturerad Matlab-kod, samt plottar och svar på ställda frågor. Var noga med att er kod går att köra oberoende av andra program och inställningar i matlab, och att funktioner tar precis de argument och lämnar de värden, samt skriver ut/ritar det, som krävs i uppgiften.

Teoriövningar

Uppgift 1. Bestäm matriserna för följande linjära avbildningar. Sats 3.11, exempel 3.17 och proposition 3.18 kan vara till hjälp.

(a) i två dimensioner
   (i) Rotation moturs θ radianer kring origo.
   (ii) Skalning med en faktor s, med origo som fix punkt.
   (iii) Ortogonal projektion på x-axeln respektive y-axeln.

(b) i tre dimensioner
   (i) Rotation moturs θ radianer kring z-axeln.
   (ii) Skalning med en faktor s, med origo som fix punkt.
   (iii) Ortogonal projektion på xy-planet, yz-planet respektive z-axeln.

Uppgift 2. När man sysslar med (dator)-grafik är affina avbildningar viktiga. En affin avbildning är en (godtycklig) sammansättning av en linjär avbildning och en translation. Studera bokens kapitel 3.7.

(a) En translation $T_{\mathbf{b}}$ med en vektor $\mathbf{b}$, är helt enkelt addition med vektorn $\mathbf{b}$: $T_{\mathbf{b}}(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + \mathbf{b}$. Visa att en translation **inte** är en linjär avbildning (om $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$).

(b) Låt $f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ vara en linjär avbildning med matrisen $A = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$. Beräkna $T_{\mathbf{b}} \circ f(\mathbf{x})$ och $f \circ T_{\mathbf{b}}(\mathbf{x})$.

(c) Betrakta ekvationen $A\mathbf{b} = \mathbf{b}$, eller ekvivalent $(A - I)\mathbf{b} = \mathbf{0}$, där vi ser både A och $\mathbf{b}$ som variabler. Avgör hur många ytterligare lösningar denna ekvation har utöver de uppenbara $A = I$ (med $\mathbf{b}$ godtycklig) och $\mathbf{b} = \mathbf{0}$ (med A godtycklig).

(d) Se bokens kapitel 3.7 hur man kan representera en affin avbildning av planet π med en linjär avbildning av rummet, genom att identifiera en tvådimensionell vektor $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ med den tredimensionella vektorn $\begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$. Låt B vara en 3×3 matris som representerar en linjär avbildning av rummet som avbildar planet π på sig själv. (Vi antar alltså att $B\mathbf{v}$ har z-koordinat 1 för alla $\mathbf{v}$ som har det.) Visa att sista raden i B måste vara $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Uppgift 3. Låt $\mathbf{a}$ vara en fix enhetsvektor i rummet.

(a) Visa att avbildningarna $f(\mathbf{v}) = \mathbf{a} \times \mathbf{v}$ och $g(\mathbf{v}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{v})\mathbf{a}$ är linjära. Vilka tre olika produkter använder sig dessa två definitioner av f och g av?

(b) Ange en enhetsvektor $\mathbf{a}$ där ingen av de tre koordinaterna är 0. För detta $\mathbf{a}$, bestäm matrisen för den linjära avbildningen $f + g$.

(c) Låt nu $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Rita punkterna/vektorerna $f(\mathbf{v})$, $g(\mathbf{v})$ och $(f + g)(\mathbf{v})$, givet några val av $\mathbf{v}$. Förklara geometriskt (t. ex. projicerar, speglar, roterar, skalar, skjuvar,...) vad $f + g$ åstadkommer.

Datorövningar

Uppgift 1. Konstruera Matlab-funktioner som

(a) har argument s och ger den 2×2-matris som svarar mot skalning med s.

(b) har argument t och ger den 2×2-matris som svarar mot rotation t radianer moturs.

Uppgift 2. (a) Konstruera en funktion som har tre argument: A, $\mathbf{b}$ och $\mathbf{x}$ där A är en 2×2-matris och $\mathbf{b}$ och $\mathbf{x}$ är 2-vektorer. Funktionen ska plotta punkterna $\mathbf{x}$ och $A\mathbf{x} + \mathbf{b}$.

(b) Samma som första deluppgiften fast plotta de två punkterna i två delfönster genom att använda 'subplot'. Använd samma skala i de båda fönstren, på både x- och y-axel.

Uppgift 3. (a) Samma som uppgift 2(b) fast låt nu istället X vara en 'vektor' av n punkter lagrade som en $2 \times n$-matris. Funktionen ska ta A, $\mathbf{b}$ och X som argument och ska rita den polygon med punkterna i X som hörn, samt motsvarandes polygon då man tar $A\mathbf{x} + \mathbf{b}$ för de olika punkterna $\mathbf{x}$ i X. Funktionen ska returnera värdet Y, den matrix av samma typ som X som innhåller bildpunkterna $A\mathbf{x} + \mathbf{b}$. Exempelvis ska

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ge enhetskvadraten och bilden av denna under funktionen $A\mathbf{x} + \mathbf{b}$.

Se "Introduktion till MATLAB" för exempel hur man ritar polygontåg. Använd gärna kommandot 'axis' (kanske i kombination med 'max' och 'min') för att få lämpliga gränser för graferna. Observera att 'axis' ska anges efter plot-kommandot.

Spara er kod på denna uppgift till gruppövning 2, där ni kommer behöva den igen.

(b) Mata in en polygon X: Välj en osymmetrisk, mer komplicerad form, så att ni direkt kan se i figuren av motsvarande polygon Y vilket hörn som avbildas på vilket. Tolka med hjälp av programmet i (a) vad var och en av följande matriser åstadkommer geometriskt (t. ex.

projicerar, speglar, roterar, skalar, skjuvar,...). Vi använder hela tiden här $\mathbf{b} = \mathbf{0}$, det vill säga vi betraktar linjära, ej affina, avbildningar.

$$\begin{pmatrix} 1.3 & -2.7 \\ 2.7 & 1.3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -0.88 & -0.48 \\ -0.48 & 0.88 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1.3 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0.77 & -0.42 \\ -0.42 & 0.23 \end{pmatrix}$$

Tänk på skalningen: Rita båda polygonerna, och både x- och y-axel med samma skala för att tolka rätt!

Uppgift 4. Det finns ett kommando 'ginput' som hämtar koordinaterna för ett (eller flera) musklick, se hjälpen. Du ska nu använda detta för att få en pil att rotera och ändra längd så att den pekar dit du klickar.

(a) Rita en pil som startar i origo och slutar i $(1, 0)$ i ett kvadratiskt koordinatsystem som går från -5 till 5 i båda riktningarna.

(b) Gör en oändlig loop som i varje steg använder '[x,y]=ginput(1)' för att hämta koordinater för ett musklick och sedan roterar och skalar den ursprungliga pilen så att den fortfarande startar i origo men spetsen hamnar i punkten där du klickar. Funktionen 'atan', d. v. s. arcus tangens, kan vara användbar för att bestämma en vinkel, men tänk på att 'atan' alltid ger en vinkel i intevallet $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ så det blir olika fall att ta hänsyn till beroende på tecknet hos x.

Uppgift 5. I den här uppgiften kommer du att ha användning av kommandona 'getframe' och 'movie' (samt en funktion som du gjort själv redan). Titta i hjälpen hur 'getframe' och 'movie' fungerar.

(a) Gör en film som illustrerar en sekundvisare.

(b) Utöka så att den också har minut- och timvisare. (Här tillåter du lämpligen tiden att gå snabbare (för att få lite "action") samt hoppar några sekunder i taget (för att inte göra slut på minnet)).