EGENVEKTORER OCH EGENVÄRDEN

GRUPPÖVNING OCH DATORLABORATION 5

TMV206 - LINJÄR ALGEBRA (VT 2018)

Instruktioner

Allt material nedan **ingår i tentamen**.

Uppgift 1 bland teoriuppgifterna samt uppgift 2 bland datoruppgifterna ska redovisas skriftligt. **Deadline för inlämningen är 6/3 (tisdagsgrupper), respektive 7/3 (onsdagsgrupper), kl. 8**. Dessutom ska gruppen muntligt kunna redovisa dessa två uppgifter 6/3, respektive 7/3, och stå till svars för inlämningen.

Varje grupp redovisar gemensamt genom att lämna in lösning av teoriuppgiften i en .pdf-fil (alternativt doc/docx/odt/tex/jpg), matlabkod (.m-fil) och plottar via kursens aktivitet i PingPong. Se till att första raderna både i .pdf-filen och i .m-filen lyder: "% Grupp X, gruppövning 5", där X ersätts med ert gruppnummer, följt av en lista över CID för (aktiva) gruppmedlemmar.

Teoriuppgiften: Det krävs lösningar som är fullständiga med förklaringar och motiveringar. Endast en mängd formler och uträkningar duger inte. Läraren ska inte behöva tolka lösningen. Bara genom att läsa lösningen ska ert resonemang framgå. Lösningen ska börja med en formulering av problemet och avslutas med att det tydligt framgår vad svaren på **alla** de ställda frågorna är.

Matlabuppgiften: Det krävs en .m-fil med en väl kommenterad och strukturerad Matlab-kod, samt plottar och svar på ställda frågor. Var noga med att er kod går att köra oberoende av andra program och inställningar i matlab, och att funktioner tar precis de argument och lämnar de värden, samt skriver ut/ritar det, som krävs i uppgiften.

Teoriövningar

Uppgift 1. Antag att en 3×3-matris A har egenvärdena $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 0.8$, $\lambda_3 = 0.6$ med motsvarande egenvektorer

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \ \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ och } \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Låt $\mathbf{v} = x_1\mathbf{v}_1 + x_2\mathbf{v}_2 + x_3\mathbf{v}_3$ vara en linjärkombination av de tre egenvektorerna.

(a) Vilka 3-vektorer kan skrivas som en linjärkombination av de tre egenvektorerna?
(b) Vad är $A^n\mathbf{v}_1$, $A^n\mathbf{v}_2$, $A^n\mathbf{v}_3$ respektive $A^n\mathbf{v}$ där n är ett godtyckligt heltal?
(c) Vad händer med $A^n\mathbf{v}$ då $n \to \infty$? Se upp, det beror lite på koefficienterna x_1, x_2 och x_3.
(d) Bestäm en matris A som har de egenvärden och egenvektorer som vi föreskrev ovan. Tips: Det har något med diagonalisering att göra.

Uppgift 2. Ta reda på hur den så kallade potensmetoden och den nära relaterade inversiterationen fungerar. Dessa är metoder för att beräkna enstaka egenvärden och motsvarande egenvektor. Ett tips är att kolla på "Power iteration", "inverse iteration" och "Rayleigh quotient iteration" på engelskspråkiga wikipedia. Gå igenom och diskutera så att alla förstår hur det fungerar. Det hänger ihop med förra uppgiften, eller hur? Observera att potensmetoden är den metod som används för att beräkna Googles Pagerank och den är alltså en metod som fungerar bra då man har gigantiska (glesa) matriser.

Uppgift 3. Biluthyrningsfirman Hyr-Ett-Vrak har två kontor, ett på Centralen och ett på Landvetter. Av de bilar som är på Centralen i början av en vecka är 70% kvar där i början av veckan därpå, 10% finns på Landvetter och 20% är uthyrda. För Landvetter är motsvarande siffror att 60% är kvar på Landvetter, 10% är på Centralen och 30% är uthyrda. Av de som var uthyrda i början av en vecka är 50% det också veckan därpå, 30% är på Centralen och 20% på Landvetter. Låt c_n vara antalet bilar på Centralen vecka n, l_n antalet bilar på Landvetter vecka n och u_n antalet uthyrda bilar vecka n och låt

$$\mathbf{v}_n = \begin{pmatrix} c_n \\ l_n \\ u_n \end{pmatrix}.$$

Bestäm en matris A sådan att $\mathbf{v}_n = A\mathbf{v}_{n-1}$. Uttryck $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ och $\mathbf{v}_n$ i termer av A, $\mathbf{v}_0$ och n.

Uppgift 4. Bestäm alla möjliga ON-matriser av storlek 2×2. Vad för typ av linjär avbildning motsvarar dessa matriser?

Datorövningar

Uppgift 1. (a) Titta återigen på teoriövning 3 med biluthyrningsfirman. Antag att det från början fanns lika många bilar på Centralen, på Landvetter och som var uthyrda, d. v. s. att $c_0 = l_0 = u_0 = 1/3$. Vad är fördelningen efter 1, 10, 100, 1000, 10000, 100000 veckor? Hur förändrar sig dessa fördelningar om alla bilar från början fanns på centralen?

(b) Bestäm med hjälp av egenvärden och egenvektorer hur fördelningen mellan bilar på Centralen, Landvetter och uthyrda är efter LÅNG tid. (Man kan beräkna egenvärden och egenvektorer med kommandot 'eig'.)

Uppgift 2. Om ni inte har gjort teoriövning 2 så är det dags att kolla på den nu. Skriv två Matlabfunktioner som gör följande.

(a) Givet en matris A och en precision p beräknar det största egenvärdet till A och motsvarande egenvektor med hjälp av potensmetoden med sådan precision att skillnaden mellan två på varandra följande Rayleigh-kvoter i iterationen är mindre än 10^{-p}. Förutom att returnera egenvärde och egenvektor ska funktionen också skriva ut hur många iterationer som krävdes.

(b) Givet en matris A, ett tal r och en precision p med hjälp av inversiteration beräknar det egenvärde som är närmast r och motsvarande egenvektor med sådan precision att skillnaden mellan två på varandra följande Rayleigh-kvoter i iterationen är mindre än 10^{-p}. Förutom att returnera egenvärde och egenvektor ska funktionerna också skriva ut hur många iterationer som krävdes.

Tänk på normalisering: Multipler av en egenvektor är också en egenvektor! Kommandot 'norm($\mathbf{x}$)' ger längden av vektorn $\mathbf{x}$.

Testa era funktioner på några slumpmatriser (även på lite större sådana t. ex. 500×500) genom att jämföra med resultatet från Matlabs rutin 'eig' som beräknar alla egenvärden (inklusive ickereella) med hjälp av den så kallade QR-faktoriseringen.