MATEMATIK
Chalmers Tekniska Högskola
Tentamen i Linjär algebra IT, TMV206, 2015-08-27
Hjälpmedel: Inga, ej heller räknedosa.
Examinator: Andreas Rosén
Telefonvakt: Åse Fahlander, 0703-088304

OBS: För betyget 3 krävs minst 20 poäng sammanlagt, för 4 krävs 30 poäng och för 5 krävs 40 poäng, inklusive bonuspoäng från duggor i Maple-TA.
Räkningarna och resonemangen ska redovisas och vara noggrant förklarade. Lösningarna ska vara välskrivna och avslutas med tydligt svar som är förenklat så långt som möjligt.
Lösningar och besked om rättning och granskning lämnas på kursens hemsida.

---

1. Låt $M = \begin{pmatrix} -1 & a & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2a & 9 & 15 \end{pmatrix}$ och betrakta det linjära ekvationssystemet

$$M\mathbf{x} = \mathbf{b},$$

   där $\mathbf{b}$ är en given 3-vektor.

   (a) Bestäm samtliga värden på parametern a, för vilka ekvationssystemet inte har en unik lösning $\mathbf{x}$.

   (b) Ge ett exempel på a och $\mathbf{b}$, för vilka ekvationssystemet är olösbart. (6p)

2. Beräkna arean av den plana triangel i rummet som har hörn i $(2, 1, 5)$, $(1, 2, 3)$ och $(4, 6, 4)$. (6p)

3. Betrakta linjen L_1 vars ekvation på parameterform är $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 11 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$, och linjen L_2 vars ekvation på parameterform är $\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Avgör om linjerna L_1 och L_2 skär varandra. Om så är fallet ska den spetsiga vinkeln mellan linjerna beräknas. Om så inte är fallet ska avståndet mellan linjerna beräknas. (6p)

4. Beräkna samtliga egenvärden och egenvektorer till matrisen $A = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 18 & -10 \end{pmatrix}$. (6p)

Var god vänd!

5. Finn en positivt orienterad ON-bas $\mathbf{g}_1$, $\mathbf{g}_2$ och $\mathbf{g}_3$, där $\mathbf{g}_2$ har samma riktning som $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, och $\mathbf{g}_3$ har samma riktning som $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Beräkna koordinaterna för vektorn $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ i basen $\mathbf{g}_1$, $\mathbf{g}_2$ och $\mathbf{g}_3$. (6p)

6. Låt $M = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 2 & 5 & 5 \\ 3 & 4 & 5 \\ 5 & 6 & 1 \end{pmatrix}$. Visa att M utgör övergångsmatrisen för en Markovkedja, och beräkna dennas stationära fördelning. (6p)

7. Bestäm alla 3×3 matriser A som har en egenvektor $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ med egenvärde 2, en egenvektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ med egenvärde 1, och en egenvektor $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ med egenvärde 1. (7p)

8. Antag att 3×3 matrisen

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

har tre egenvärden λ_1, λ_2 och λ_3. Visa att $a_{11} + a_{22} + a_{33} = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$. (7p)