MATEMATIK
Chalmers Tekniska Högskola
Tentamen i Linjär algebra IT, TMV206, 2016-03-17
Hjälpmedel: Inga, ej heller räknedosa.
Examinator: Andreas Rosén
Telefonvakt: Tim Cardilin, ankn. 5325

OBS: För betyget 3 krävs minst 20 poäng sammanlagt, för 4 krävs 30 poäng och för 5 krävs 40 poäng, inklusive bonuspoäng från duggor i Maple-TA.
Räkningarna och resonemangen ska redovisas och vara noggrant förklarade. Lösningarna ska vara välskrivna och avslutas med tydligt svar som är förenklat så långt som möjligt.
Lösningar och besked om rättning och granskning lämnas på kursens hemsida.

---

1. Låt f och g vara linjära avbildningar av planet, där f är rotation vinkeln $5\pi/3$ moturs kring origo, och g är spegling i linjen $x + y = 0$. Bestäm matrisen för den sammansatta avbildning som först avbildar med f^{-1}, sedan med g och sist med f. (6p)

2. Beräkna avståndet från punkten $(1, 1, 1)$ till planet som går genom $(1, 0, 1)$, $(2, 3, 0)$ och $(0, 1, 1)$. (6p)

3. Avgör för vilka val av tal a och b som ekvationsystemet
$$\begin{cases} x - 2y + (b-2)z = -1, \\ (a+b)y - z = 2, \\ 3x - 6y + bz = a + 5, \end{cases}$$
har oändligt många lösningar (x, y, z). Bestäm samtliga sådana lösningar. (6p)

4. Betrakta punkterna $P_1 = (1, 1, 2)$, $P_2 = (-1, 2, 1)$ och $P_3 = (2, 1, -1)$
   (a) Bestäm arean av triangeln med hörn i P_1, P_2 och P_3.
   (b) Bestäm volymen av parallellepipeden med hörn i origo, P_1, P_2 och P_3.
   (6p)

5. Beräkna samtliga egenvärden och egenvektorer till matrisen
$$A = \begin{pmatrix} -12 & -30 \\ 5 & 13 \end{pmatrix}.$$
(6p)

Var god vänd!

6. Betrakta vektorerna $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ och $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, och låt f vara spegling i planet genom origo som är parallellt med $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$.

   (a) Visa att det finns en höger ON-bas $G = (\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3)$ där $\mathbf{g}_1$ har samma riktning som $\mathbf{u}$ och $\mathbf{g}_3$ har samma riktning som $\mathbf{v}$. Beräkna denna bas.

   (b) Bestäm f:s matris i basen G.

   (c) Bestäm f:s matris i standardbasen.

(7p)

7. Biluthyrningsfirman Hyr-Ett-Vrak har två kontor, ett på Centralen och ett på Landvetter. Av de bilar som är på Centralen i början av en vecka är 70% kvar där i början av veckan därpå, 10% finns på Landvetter och 20% är uthyrda. För Landvetter är motsvarande siffror att 60% är kvar på Landvetter, 10% är på Centralen och 30% är uthyrda. Av de som var uthyrda i början av en vecka är 50% det också veckan därpå, 30% är på Centralen och 20% på Landvetter. Låt c_n vara andelen bilar på Centralen vecka n, l_n andelen bilar på Landvetter vecka n och u_n andelen uthyrda bilar vecka n och låt

$$\mathbf{v_n} = \begin{pmatrix} c_n \\ l_n \\ u_n \end{pmatrix}.$$

   (a) Bestäm en matris A sådan att $\mathbf{v}_n = A\mathbf{v}_{n-1}$. Uttryck $\mathbf{v}_n$ i termer av A, $\mathbf{v}_0$ och n.

   (b) Beräkna en stationär fördelning av bilarna. (Notera att vi använder kolumnvektorer här, inte radvektorer som vid Markovkedjor.)

(6p)

8. Betrakta en $n \times n$ matris M.

   (a) Redogör för vad det betyder i termer av M:s element, att M är övergångsmatrisen för en Markovkedja på n noder.

   (b) Antag att λ är ett egenvärde till M^t. Visa att $|\lambda| \leq 1$, det vill säga att $-1 \leq \lambda \leq 1$.

(7p)