Lösningsförslag till tentamen i TMV206 Linjär algebra IT 2016-03-17

1. Enligt bassatsen blir matrisen för f lika med $A = \begin{pmatrix} 1/2 & \sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix}$, och matrisen för g blir $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Då sammansättning av avbildningar motsvarar matrismultiplikation, blir den sökta matrisen

$$ABA^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & \sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sqrt{3}/2 & 1/2 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix}.$$

2. Vi använder $(1,0,1)$ som origo i planet, och får tangentvektorer $(2,3,0)^t - (1,0,1)^t = (1,3,-1)^t$ och $(0,1,1)^t - (1,0,1)^t = (-1,1,0)^t$ till planet, och därmed normalvektor

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Det sökta avståndet ses vara längden av projektionen av $(1,1,1)^t - (1,0,1)^t = (0,1,0)^t$ på normallinjen till planet. Med projektionsformeln blir detta

$$\left\| \frac{(0,1,0)^t \cdot (1,1,4)^t}{\|(1,1,4)^t\|^2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \right\| = \frac{|(0,1,0)^t \cdot (1,1,4)^t|}{\|(1,1,4)^t\|} = 1/\sqrt{18} = \sqrt{2}/6.$$

3. Radoperationen rad 3:= rad 3- 3 rad 1, ger oss det ekvivalenta systemet

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & b-2 & -1 \\ 0 & a+b & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 6-2b & a+8 \end{pmatrix}.$$

Om $b = 3$ ser vi att lösningar saknas om inte $a = -8$, i vilket fall vi har oändligt många lösningar (en fri kolumn, och därmed en linje som lösningsmängd). Om $b \neq 3$, så har vi exakt en lösning om inte $a + b = 0$. För att undersöka detta fall, sätter vi $a = -b$ och får genom radoperationen rad 3:= rad 3+ (6-2b) rad 1, systemet

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & b-2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 20-5b \end{pmatrix}.$$

Om $b \neq 4$ saknas alltså lösningar, och då $b = 4$ har vi oändligt många lösningar längs en linje. Svar: Fallen då vi har oändlgt många lösningar är $(a,b) = (-8,3)$ och $(a,b) = (-4,4)$. Lösningarna blir $(-9/5, -2/5, 0)^t + t(-7/5, -1/5, 1)^t$ respektive $(3,0,-2)^t + t(2,1,0)^t$.

4. Två kantvektorer till triangeln är $(-1,2,1)^t - (1,1,2)^t = (-2,1,-1)^t$ och $(2,1,-1)^t - (1,1,2)^t = (1,0,-3)^t$. Vi vet att arean av den dubbelt så stora parallellogrammen är längden av vektorprodukten mellan dessa kantvektorer. Alltså blir den söka triangelarean

$$\frac{1}{2} \left\| \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} \right\| = \frac{1}{2} \left\| \begin{pmatrix} -3 \\ -7 \\ -1 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{59}/2.$$

Volymen av parallellepipeden ges, så när som på tecken, av determinanten

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (-2-2+2)-(8+1+1) = -12.$$

Den sökta volymen blir alltså 12. (P_1, P_2 och P_3 antas vara hörn närliggande origo i parallellepipeden.)

5. Egenvärdena beräknas som rötterna till den karakteristiska ekvationen

$$\begin{vmatrix} -12-\lambda & -30 \\ 5 & 13-\lambda \end{vmatrix} = (-12-\lambda)(13-\lambda)+150 = \lambda^2-\lambda+6 = 0.$$

Kvadratkomplettering ger $(\lambda - 1/2)^2 = 25/4$, så egenvärdena blir $\lambda = 3$ och $\lambda = -2$. Egenvektorerna beräknas genom lösning av respektive homogent ekvationssystem. För $\lambda = 3$ får vi två ekvationer ekvivalenta med $x+2y = 0$, och egenvektorerna med egenvärde 3 blir alla nollskilda multipler av $(2,-1)^t$. För $\lambda = -2$ får vi två ekvationer ekvivalenta med $x+3y = 0$, och egenvektorerna med egenvärde 3 blir alla nollskilda multipler av $(3,-1)^t$.

6. En sådan höger ON-bas finns eftersom de givna vektorerna $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ är ortogonala. Vi normerar dessa och får $\mathbf{g}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0)^t$ och $\mathbf{g}_3 = \frac{1}{3}(2,2,1)^t$. För att det ska bli en höger ON-bas sätter vi

$$\mathbf{g}_2 = \frac{1}{3\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{3\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

Eftersom basvektorerna är tangent-, normal- respektive tangentvektor till speglingsplanet, så ger bassatsen i bas G matrisen $A_G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Med basbytesformeln för matriser beräknar vi sedan matrisen i standardbasen till

$$\begin{aligned} GA_GG^{-1} &= \frac{1}{(3\sqrt{2})^2}\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2\sqrt{2} \\ -3 & 1 & 2\sqrt{2} \\ 0 & -4 & \sqrt{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & -4 \\ 2\sqrt{2} & 2\sqrt{2} & \sqrt{2} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 8 & -1 & 4 \\ -1 & 8 & 4 \\ 4 & 4 & -7 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Vi har här använt att $G^{-1} = G^t$, eftersom vi har en ON-bas.

7. Vi ser att matrisen blir

$$A = \tfrac{1}{10}\begin{pmatrix} 7 & 1 & 3 \\ 1 & 6 & 2 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix},$$

och att fördelningen av bilar efter n veckor blir $\mathbf{v}_n = A^n\mathbf{v}_0$. Stationära fördelning betyder $A\mathbf{v} = \mathbf{v}$, så vi beräknar egenvektorn med egenvärdet 1 till A. Vi multiplicerar ekvationen med 10 och beräknar

$$\begin{pmatrix} -3 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & -4 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & -5 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 & 0 \\ 0 & -11 & 9 & 0 \end{pmatrix}.$$

Vi sätter $x_3 = 11t$ och får $x_2 = 9t$ och $x_1 = 14t$, så egenvektorerna blir $(x_1, x_2, x_3)^t = t(14, 9, 11)^t$. Vi bestämmer t så att $14t + 9t + 11t = 34t = 1$. Svar: Den sökta stationära fördelningen är $(7/17, 9/34, 11/34)$.

8. Övergångsmatris betyder att alla elementen m_{ij} i M är $0 \le m_{ij} \le 1$, samt att alla radsummorna $m_{j1} + m_{j2} + \ldots + m_{jn} = 1$, för $1 \le j \le n$. Antag nu att $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^t$ är nollskild och löser $M^t\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$, det vill säga är en egenvektor. Rad i av denna vektorekvation ses vara
$$m_{1i}x_1 + m_{2i}x_2 + \ldots + m_{ni}x_n = \lambda x_i.$$
Triangelolikheten ger att
$$|\lambda||x_i| \le m_{1i}|x_1| + m_{2i}|x_2| + \ldots + m_{ni}|x_n|,$$
eftersom M:s element är ≥ 0. Summera nu alla dessa olikheter för $i = 1, 2, \ldots, n$. Vi får
$$|\lambda|(|x_1| + |x_2| + \ldots + |x_n|) \le |x_1| + |x_2| + \ldots + |x_n|,$$
eftersom radsummorna är 1. Då $|x_1| + |x_2| + \ldots + |x_n| > 0$ följer att $|\lambda| \le 1$ som önskat. Notera att det var nödvändigt ovan att använda triangelolikheten eftersom det är fullt möjligt att $x_1 + \ldots + x_n = 0$.