MATEMATIK
Chalmers Tekniska Högskola
Tentamen i Linjär algebra IT, TMV206, 2016-04-09
Hjälpmedel: Inga, ej heller räknedosa.
Examinator: Andreas Rosén
Telefonvakt: Anders Martinsson, 5325

OBS: För betyget 3 krävs minst 20 poäng sammanlagt, för 4 krävs 30 poäng och för 5 krävs 40 poäng, inklusive bonuspoäng från duggor i Maple-TA.
Räkningarna och resonemangen ska redovisas och vara noggrant förklarade. Lösningarna ska vara välskrivna och avslutas med tydligt svar som är förenklat så långt som möjligt.
Lösningar och besked om rättning och granskning lämnas på kursens hemsida.

---

1. Låt $P = (1, 0, -2)$ och $Q = (-1, 1, 1)$.
   (a) Ange ekvationen, på parameterform, för den linje L som går genom P och Q.
   (b) Ange ekvationen, på normalform, för ett plan π som går genom P och Q.
   (c) Avgör om punkten $R = (2, -1, 0)$ ligger på linjen L. Avgör också om punkten R ligger i planet π. (6p)

2. Låt f vara den linjära avbildning av planet som projicerar ortogonalt på linjen $x + y = 0$. Låt g vara den linjära avbildning av planet som roterar moturs vinkeln $\pi/3$ kring origo. Bestäm matrisen för den sammansatta avbildning som först avbildar med f och sedan med g. (6p)

3. Betrakta matrisen $A = \begin{pmatrix} 29 & -45 \\ 18 & -28 \end{pmatrix}$. Beräkna A^{2n} för alla positiva heltal n, uttryckt i termer av skalära exponentialfunktioner a^n, $a \in \mathbf{R}$. (6p)

Var god vänd!

4. Betrakta ekvationssystemet

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = b_1, \\ 2x - (a+1)y + z = b_2, \\ 2ax + (a+2)y + 2z = b_3. \end{cases}$$

(a) Bestäm alla värden på a, b_1, b_2, b_3 för vilka ekvationssystemet har en unik lösning x, y, z.

(b) Ge ett exempel på värden på a, b_1, b_2, b_3 för vilka ekvationssystemet har oändligt många lösningar x, y, z. (6p)

5. Betrakta linjen L som beskrivs av $\begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ och planet π som beskrivs av $4x - y - z = 3$. Avgör om L skär π. Om så är fallet ska den spetsiga vinkeln mellan L och π beräknas. Om så inte är fallet ska avståndet mellan L och π beräknas. (6p)

6. Låt $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 2/3 \\ 2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}$, och betrakta den linjära avbildningen $f(\mathbf{x}) = \mathbf{a} \times (\mathbf{x} \times \mathbf{a})$.

(a) Beräkna f:s matris i en höger ON-bas $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3$ där $\mathbf{g}_2 = \mathbf{a}$.

(b) Beräkna f:s matris i standardbasen.

(c) Beskriv vad f åstadkommer geometriskt. (7p)

7. Betrakta den riktade grafen $G = (V, E)$, där $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ och

$$E = \{(2,3), (3,5), (5,4), (4,2), (2,1), (1,3), (4,1), (5,1)\}.$$

Rita grafen, bestäm dess grannmatris och beräkna en stationär fördelning för slumpvandringen på G. (6p)

8. Låt A vara en $n \times n$ matris och antag att A har en vänsterinvers B, det vill säga $BA = I$.

(a) Visa att det existerar en högerinvers C till A, det vill säga en matris sådan att $AC = I$.

(b) Bestäm C. (7p)