Matematiska vetenskaper
Chalmers
Johan Björklund

Datum: 2017-03-13
Hjälpmedel: Skrivdon.
Telefonvakt: Johan Björklund

Tid: 8:30-12:30

Tel.: ankn 3582

Tentamen i TMV206

Lösningarna skall presenteras på ett sådant sätt att räkningar och resonemang blir lätta att följa. Motivera dina svar. Gränser är 20 för betyg 3, 30 för betyg 4 samt 40 för betyg 5. Tentan har maximalt 50 poäng, därtill kommer poäng från MapleTA (max 4 poäng). Poängen per uppgift bör ses som ungefärlig, hänsyn tas också till tentans helhetsintryck.

1. På denna uppgift ska enbart svar ges. En poäng per deluppgift.

   a) Finn en (nollskild) vektor ortogonal mot både $(1, 2, 3)^T$ och $(1, 0, -2)^T$.

   b) Ge normalen till planet som bestäms av ekvationen $7x + y + 5z = -1$.

   c) Projicera vektorn $(2, 2, 1)^T$ ortogonalt på linjen som spänns upp av vektorn $(2, -1, 2)^T$.

   d) Bestäm skärningspunkten för linjerna $L_1(t) = (1, 2) + t(0, 1), L_2(s) = (4, 1) + s(2, -1)$.

   e) Beräkna A^4v om vi vet att v är en egenvektor till matrisen A med egenvärde -1. Svaret får innehålla v.

   f) Beräkna determinanten för följande matris: $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$

6p

2. Varje påstående ska besvaras med sant eller falskt. Rätt svar ger $1p$, fel svar ger $-1p$ (inget svar ger $0p$). Man kan inte få mindre än 0 poäng på hela uppgiften.

   a) Om A är en matris så är A^2 alltid definierad.

   b) Om A och B är två inverterbara $n \times n$ matriser så är $A + B$ också inverterbar.

   c) Om v och u är två ortogonala vektorer så är $v \cdot u = 0$.

   d) Om v, u, w är en högerorienterad trippel av vektorer i $\mathbb{R}^3$ så är u, v, w också högerorienterad.

   e) Vektorparet $(1, 5)^T$ och $(5, 1)^T$ utgör en bas för $\mathbb{R}^2$.

   f) För skalärprodukten gäller alltid att $\mathbf{v} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$.

6p

3. Låt H vara planet definierat av $x + 2y + 3z = 6$. Bestäm avståndet från H till punkten $P = (0, -1, -2)$.

6p

4. Om vi har fyra olika punkter i rummet så kan tre olika situationer uppstå:

- De fyra punkterna bildar hörnet på ett parallellogram (och ligger då i samma plan).
- De fyra punkterna ligger i ett plan, men bildar inte hörnen på ett parallellogram.
- De fyra punkterna ligger inte i samma plan (deras hörn ger då en tetraeder med positiv volym).

a) Låt $(2, 3, 4)$, $(3, 3, 4)$, $(2, 4, 4)$ och $(2, 3, 5)$ vara de fyra punkterna. Bestäm vilken av de olika situationerna som stämmer i detta fall.

b) Svara därefter på den av nedanstående problem som motsvarar din situation.

- Om de bildar ett parallellogram, beräkna parallellogrammets area.
- Om de inte gör det men ligger i ett plan, ge planets ekvation.
- Om de inte ligger i samma plan, bestäm volymen av tetraedern som de fyra punkterna bildar (en tetraeders volym är $1/6$ av volymen hos parallellepipeden som spänns upp av de tre sidorna som utgår från ett hörn i tetraedern).

6p

5. Bestäm för varje värde på a de möjliga lösningarna till följande ekvationssystem:

$$\begin{cases} x_1 & + & & & x_3 & = 4 \\ x_1 & + & (a-1)x_2 & + & (2-a)x_3 & = 0 \\ 2x_1 & + & ax_2 & + & 3x_3 & = 6 \end{cases}$$

7p

6. Låt

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Om $C = AB$, bestäm C^{-1}.
b) Lös ekvationen $ABx = v$ där $v = (-1, 1, 0)^T$

6p

7. Låt

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Beräkna A^{20}. Heltalspotenser behöver inte räknas ut (så det är ok att svaret innehåller exempelvis $5^9\sqrt{3}$).

6p

8. Låt $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ vara två vektorer. Visa att $\frac{|\mathbf{u}|^2+|\mathbf{v}|^2}{2} \geq \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$.
Tips: Undersök $(\mathbf{u} - \mathbf{v}) \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{v})$.

7p