Matematiska vetenskaper
Chalmers
Johan Björklund

Datum: 2017-03-13
Hjälpmedel: Skrivdon.
Telefonvakt: Johan Björklund

Tid: 8:30-12:30

Tel.: ankn 3582

Tentamen i TMV206

Lösningarna skall presenteras på ett sådant sätt att räkningar och resonemang blir lätta att följa. Motivera dina svar. Gränser är 20 för betyg 3, 30 för betyg 4 samt 40 för betyg 5. Tentan har maximalt 50 poäng, därtill kommer poäng från MapleTA (max 4 poäng). Poängen per uppgift bör ses som ungefärlig, hänsyn tas också till tentans helhetsintryck.

1. På denna uppgift ska enbart svar ges. En poäng per deluppgift.

   a) Finn en (nollskild) vektor ortogonal mot både $(1, 2, 3)^T$ och $(1, 0, -2)^T$.

   b) Ge normalen till planet som bestäms av ekvationen $7x + y + 5z = -1$.

   c) Projicera vektorn $(2, 2, 1)^T$ ortogonalt på linjen som spänns upp av vektorn $(2, -1, 2)^T$.

   d) Bestäm skärningspunkten för linjerna $L_1(t) = (1, 2) + t(0, 1), L_2(s) = (4, 1) + s(2, -1)$.

   e) Beräkna $A^4 v$ om vi vet att v är en egenvektor till matrisen A med egenvärde -1. Svaret får innehålla v.

   f) Beräkna determinanten för följande matris: $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$

   SVAR:
   a) $(4, -5, 2)^T$, fås genom t.ex. kryssprodukt.
   b) $(7, 1, 5)^T$
   c) $\frac{4}{9}(2, -1, 2)^T$
   d) $(1, \frac{5}{2}$
   e) v
   f) 10

6p

2. Varje påstående ska besvaras med sant eller falskt. Rätt svar ger $1p$, fel svar ger $-1p$ (inget svar ger $0p$). Man kan inte få mindre än 0 poäng på hela uppgiften.

   a) Om A är en matris så är A^2 alltid definierad.

   b) Om A och B är två inverterbara $n \times n$ matriser så är $A + B$ också inverterbar.

   c) Om v och u är två ortogonala vektorer så är $v \cdot u = 0$.

   d) Om v, u, w är en högerorienterad trippel av vektorer i $\mathbb{R}^3$ så är u, v, w också högerorienterad.

   e) Vektorparet $(1, 5)^T$ och $(5, 1)^T$ utgör en bas för $\mathbb{R}^2$.

   f) För skalärprodukten gäller alltid att $\mathbf{v} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$.

   SVAR: F,F,S,F,S,S

6p

3. Låt H vara planet definierat av $x + 2y + 3z = 6$. Bestäm avståndet från H till punkten $P = (0, -1, -2)$.

   Avståndet är $\sqrt{14}$. Kan fås fram genom att starta i punkten och gå i normalens $((1, 2, 3))$ riktning tills vi möter planet i punkten $(1, 1, 1)$.

6p

4. Om vi har fyra olika punkter i rummet så kan tre olika situationer uppstå:

- De fyra punkterna bildar hörnet på ett parallellogram (och ligger då i samma plan).
- De fyra punkterna ligger i ett plan, men bildar inte hörnen på ett parallellogram.
- De fyra punkterna ligger inte i samma plan (deras hörn ger då en tetraeder med positiv volym).

a) Låt $(2, 3, 4)$, $(3, 3, 4)$, $(2, 4, 4)$ och $(2, 3, 5)$ vara de fyra punkterna. Bestäm vilken av de olika situationerna som stämmer i detta fall.

b) Svara därefter på den av nedanstående problem som motsvarar din situation.

- Om de bildar ett parallellogram, beräkna parallellogrammets area.
- Om de inte gör det men ligger i ett plan, ge planets ekvation.
- Om de inte ligger i samma plan, bestäm volymen av tetraedern som de fyra punkterna bildar (en tetraeders volym är $1/6$ av volymen hos parallellepipeden som spänns upp av de tre sidorna som utgår från ett hörn i tetraedern).

SVAR:
Punkterna ger en tetraeder med volym $\frac{1}{6}$. Inses genom att ta en av dem, P_0, och ta determinanten av vektorerna P_0P_i där P_i är de tre andra punkterna. Determinanten är 1 (så speciellt inte 0, dvs vi är inte i ett plan), och då är paralellepipedens volym 1.

6p

5. Bestäm för varje värde på a de möjliga lösningarna till följande ekvationssystem:

$$\begin{cases} x_1 & + & & & x_3 & = 4 \\ x_1 & + & (a-1)x_2 & + & (2-a)x_3 & = 0 \\ 2x_1 & + & ax_2 & + & 3x_3 & = 6 \end{cases}$$

SVAR:
Vi Gausseliminerar tills vi når:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & a & 2 \\ 0 & 0 & a^2-1 & 2a+2 \end{pmatrix}$$

Två intressanta fall, $a = 1, a = -1$. I det första fallet $a = 1$ så har vi pivotelement i sista kolonnen, dvs ingen lösning. Fall 2, $a = -1$ så får vi en nollrad, och vi ser att lösningarna är $(x_1, x_2, x_3) = (4, 2, 0) + t(-1, 1, 1)$ Annars så är $a^2 - 1 \neq 0$ och vi kan dividera med det. Då har vi (efter lite mer Gausseliminering) att

$$(x_1, x_2, x_3) = (\frac{4a-6}{a-1}, \frac{2}{1-a}, \frac{2}{a-1})$$

, dvs unik lösning.

7p

6. Låt

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Om $C = AB$, bestäm C^{-1}.
b) Lös ekvationen $ABx = v$ där $v = (-1, 1, 0)^T$

SVAR: På a) så är det lättast att använda att $C^{-1} = B^{-1}A^{-1}$. Vi ser då att

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 7 & -4 & 1 \end{pmatrix} B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -5 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} C^{-1} = \begin{pmatrix} -36 & 21 & -5 \\ -23 & 13 & -3 \\ 7 & -4 & 1 \end{pmatrix}.$$

På b) så löser vi $Cx = v$ genom att multiplicera med C^{-1} och får $x = (57, 36, -11)$.

6p

7. Låt

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Beräkna A^{20}. Heltalspotenser behöver inte räknas ut (så det är ok att svaret innehåller exempelvis $5^9\sqrt{3}$).

Görs enklast genom att bestämma egenvektorer och egenvärden (vektorer är $(1, 1)^T$ med egenvärde 4 och $(1, -1)^T$ med egenvärde -2. I denna bas B så är matrisen alltså

$$A_B = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Detta ger $A^20 = (BA_BB^{-1})^20 = BA_B^{20}B^{-1}$. Efter beräkning så har vi

$$A^{20} = \begin{pmatrix} 4^{20} + 2^{20} & 4^{20} - 2^{20} \\ 4^{20} - 2^{20} & 4^{20} + 2^{20} \end{pmatrix}.$$

6p

8. Låt $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ vara två vektorer. Visa att $\frac{|\mathbf{u}|^2+|\mathbf{v}|^2}{2} \geq \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$.
Tips: Undersök $(\mathbf{u} - \mathbf{v}) \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{v})$.

SVAR:Notera att $|u - v|^2 \geq 0$ då det är en kvadrat. Då har vi:

$$0 \leq |u - v|^2 = (u - v) \cdot (u - v) = u \cdot u + v \cdot v - 2u \cdot v$$

med hjälp av reglerna för skalärprodukt. Flyttar vi $2u \cdot v$ till andra sidan och delar med 2 (samt noterar att längd i kvadrat är skalären med sig själv) så får vi den önskade identiteten.

7p