Matematiska vetenskaper
Chalmers
Johan Björklund

Datum: 2017-06-08
Hjälpmedel: Skrivdon.
Telefonvakt: Tim Cardilin

Tid: 08:30-12:30
Tel.: ankn 5325

Tentamen i TMV206

Lösningarna skall presenteras på ett sådant sätt att räkningar och resonemang blir lätta att följa. Motivera dina svar.Gränserna är 20/30/40 för betyg 3/4/5. Tentan har maximalt 50 poäng, därtill kommer poäng från MapleTA (max 3 poäng). Hänsyn tas även till helhetsintrycket.

1. På denna uppgift ska enbart svar ges. En poäng per deluppgift.

   a) Finn en (nollskild) vektor ortogonal mot både $(3, 0, 3)^T$ och $(2, -1, -2)^T$.

   b) Ge normalen till planet som bestäms av ekvationen $5x - y - 2z = 0$

   c) Projicera vektorn $(3, -2, 4)^T$ ortogonalt på linjen som spänns upp av vektorn $(2, 1, 2)^T$.

   d) Bestäm skärningspunkten för linjerna $L_1(t) = (0, 2) + t(1, 1), L_2(s) = (4, -4) + s(1, -1)$.

   e) Beräkna $A^6 v$ om vi vet att v är en egenvektor till matrisen A med egenvärde 0.

   f) Beräkna determinanten för följande matris: $A = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$

6p

2. Varje påstående ska besvaras med sant eller falskt. Rätt svar ger $1p$, fel svar ger $-1p$ (inget svar ger $0p$). Man kan inte få mindre än 0 poäng på hela uppgiften.

   a) Om A är en godtycklig matris så är A^2 alltid definierad.

   b) Om A är en inverterbar matris så är A^2 också inverterbar.

   c) Om u och v är ortogonala vektorer, och v och w också är ortogonala så måste u och w vara ortogonala.

   d) Om v, u, w är en högerorienterad trippel av vektorer i $\mathbb{R}^3$ så är $-v, -u, -w$ också högerorienterad.

   e) Vektorparet $(2, 2)^T$ och $(-3, -3)^T$ utgör en bas för $\mathbb{R}^2$.

   f) För kryssprodukten gäller alltid att $v \times v = 0$.

6p

3. Låt H vara planet definierat av $x + y + z = 1$. Bestäm spegelbilden av punkten $(4, 3, 1)$ i planet.

6p

4. Visa att punkterna $(3,1,-1)$, $(-1,1,-1)$, $(0,4,0)$ och $(0,-2,-2)$ bildar ett parallellogram. Bestäm parallellogrammets area och planet punkterna ligger i.

6p

5. Bestäm för vilka värden på a och b följande ekvationssystem är lösbart. I de fallen som det finns mer än en lösning, ange lösningarna (lösningar behöver alltså INTE anges för de a, b då ni vet att det finns exakt en).

$$x + ay + (1-a)z = 1$$
$$2x + 3ay + az = 0$$
$$3x + 3ay + (6-6a)z = b.$$

6p

6. Låt

$$A = \begin{pmatrix} 10 & -3 & 4 & 1 \\ -3 & 9 & 4 & 1 \\ -1 & 19 & 14 & -41 \\ -31 & 39 & 4 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 17 & -3 & 0 & 1 \\ -3 & 29 & 4 & -11 \\ -1 & 31 & 14 & -1 \\ -2 & 2 & 4 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & 13 & 1 & 0 \\ -1 & 13 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Vi vet att A, B, C är inverterbara. Beräkna $det(D)$ där $D = A^2CBCB^{-1}C^{-1}B^{-1}A^{-2}BC$. Tips: innan du börjar räkna, fundera på om du faktiskt behöver räkna ut alla matriser/inverser/determinanter eller inte.

6p

7. Om det är soligt en dag i Göteborg så är det chansen att det regnar nästa dag 0.6 och att det är soligt nästa dag 0.4. Om det är regnigt så är chansen att det fortsätter regna nästa dag 0.5, chansen att blir soligt nästa dag är 0.3 och annars snöar det. Om det snöar så är chansen att det fortsätter snöa 0.2, annars så regnar det. Hur stor andel av dagarna är soliga i genomsnitt om lång tid går?

7p

8. Antag att i en given bas B så beskrivs den linjära avbildningen f (från $\mathbb{R}^5$ till $\mathbb{R}^5$) med matrisen

$$R = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Går det att beräkna den matris A som beskriver avbildningen i standardbasen utan att faktiskt veta B? Om det går så ge dels ett bevis för det, och dels ge matrisen (i standardbasen) explicit. Om det inte går, ge ett exempel på två olika baser B som skulle ge olika matriser A i standardbasen.

7p