Matematiska vetenskaper	Datum: 2017-06-08	Tid: 08:30-12:30
Chalmers	Hjälpmedel: Skrivdon.	
Johan Björklund	Telefonvakt: Tim Cardilin	Tel.: ankn 5325

Tentamen i TMV206

Lösningarna skall presenteras på ett sådant sätt att räkningar och resonemang blir lätta att följa. Motivera dina svar.Gränserna är 20/30/40 för betyg 3/4/5. Tentan har maximalt 50 poäng, därtill kommer poäng från MapleTA (max 3 poäng). Hänsyn tas även till helhetsintrycket.

1. På denna uppgift ska enbart svar ges. En poäng per deluppgift.

   a) Finn en (nollskild) vektor ortogonal mot både $(3, 0, 3)^T$ och $(2, -1, -2)^T$.

   b) Ge normalen till planet som bestäms av ekvationen $5x - y - 2z = 0$

   c) Projicera vektorn $(3, -2, 4)^T$ ortogonalt på linjen som spänns upp av vektorn $(2, 1, 2)^T$.

   d) Bestäm skärningspunkten för linjerna $L_1(t) = (0, 2) + t(1, 1), L_2(s) = (4, -4) + s(1, -1)$.

   e) Beräkna $A^6 v$ om vi vet att v är en egenvektor till matrisen A med egenvärde 0.

   f) Beräkna determinanten för följande matris: $A = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$

6p

SVAR:a) $(3, 12, -3)$ med t.ex. kryssprodukt.
b) $(5, -1, -2)$
c) $\frac{4}{3}(2, 1, 2)$
d) $(-1, 1)$
e) $0v$ =nollvektorn
f) -13

2. Varje påstående ska besvaras med sant eller falskt. Rätt svar ger $1p$, fel svar ger $-1p$ (inget svar ger $0p$). Man kan inte få mindre än 0 poäng på hela uppgiften.

   a) Om A är en godtycklig matris så är A^2 alltid definierad.

   b) Om A är en inverterbar matris så är A^2 också inverterbar.

   c) Om u och v är ortogonala vektorer, och v och w också är ortogonala så måste u och w vara ortogonala.

   d) Om v, u, w är en högerorienterad trippel av vektorer i $\mathbb{R}^3$ så är $-v, -u, -w$ också högerorienterad.

   e) Vektorparet $(2, 2)^T$ och $(-3, -3)^T$ utgör en bas för $\mathbb{R}^2$.

   f) För kryssprodukten gäller alltid att $v \times v = 0$.

6p

Svar:FSFFFS

3. Låt H vara planet definierat av $x + y + z = 1$. Bestäm spegelbilden av punkten $(4, 3, 1)$ i planet.

6p

SVAR: Normalen till planet är (1,1,1). En punkt i planet är $(0,0,1)$. Vektorn $(-4,-3,0)$ går från punkten till planet. Projektionen på normalen blir $v_n = \frac{-7}{3}(1,1,1)$. Alltså så är spegelbilden $S = (4,3,1) - \frac{14}{3}(1,1,1) = (-\frac{2}{3}, -\frac{5}{3}, -\frac{11}{3})$.

4. Visa att punkterna $(3,1,-1)$, $(-1,1,-1)$, $(0,4,0)$ och $(0,-2,-2)$ bildar ett parallellogram. Bestäm parallellogrammets area och planet punkterna ligger i.

6p

SVAR: Skrivfel i tentan, de bildar inte ett parallellogram (borde nog antingen ha varit om de bildar ett parallellogram eller att tredje punkten är $(2,4,0)$. Planet är $y - 3z = 4$ (kan ses genom kontroll, beräknas lättast genom att ta kryssprodukt för att hitta normalen). Poängmässigt så sänker jag gränser med 3p, och uppgiften ger max 3p (för att hitta planet, man kan också få poäng om man visar att det inte är ett parallellogram).

5. Bestäm för vilka värden på a och b följande ekvationssystem är lösbart. I de fallen som det finns mer än en lösning, ange lösningarna (lösningar behöver alltså INTE anges för de a, b då ni vet att det finns exakt en).

$$x + ay + (1-a)z = 1$$
$$2x + 3ay + az = 0$$
$$3x + 3ay + (6-6a)z = b.$$

6p

SVAR:Gausselimination ger systemet

$$x + ay + (1-a)z = 1$$
$$ay + (3a-2)z = -2$$
$$(3-3a)z = b-3.$$

Om $a \neq 0$ och $3 - 3a \neq 0$ så har vi pivotelement i varje rad och variabelkolonn, så det finns unik lösning (kan också ses genom att ta determinanten och kolla när den är noll). Kvar är fallen $a = 0$ och $a = 1$.
Fall 1, $a = 0$.

$$x + z = 1$$
$$-2z = -2$$
$$3z = b - 3$$

Här får vi efter lite mer gausselemination att $z = 1$,$x = 0$,$3 = b - 3$. Enda chansen att det är lösbart är att $b = 6$. Isåfall så har vi $x = 0, y = t, z = 1, t \in \mathbb{R}$.
Fall 2., $a = 1$

$$x + y = 1$$
$$y + z = -2$$
$$0 = b - 3$$

Uppenbarligen så måste $b = 3$ för att det alls ska vara lösbart. Då har vi $x = 1 - t, y = t, z = -2 - t, t \in \mathbb{R}$ som lösning.

6. Låt

$$A = \begin{pmatrix} 10 & -3 & 4 & 1 \\ -3 & 9 & 4 & 1 \\ -1 & 19 & 14 & -41 \\ -31 & 39 & 4 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 17 & -3 & 0 & 1 \\ -3 & 29 & 4 & -11 \\ -1 & 31 & 14 & -1 \\ -2 & 2 & 4 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & 13 & 1 & 0 \\ -1 & 13 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Vi vet att A, B, C är inverterbara. Beräkna $det(D)$ där $D = A^2CBCB^{-1}C^{-1}B^{-1}A^{-2}BC$. Tips: innan du börjar räkna, fundera på om du faktiskt behöver räkna ut alla matriser/inverser/determinanter eller inte.

6p

Svar:Notera att $det(XY) = det(X)det(Y)$ för kvadratiska matriser X, Y. Detta ger, tillsammans med $det(X^{-1}) = det(X)^{-1}$, att $det(D) = det(C)^2 = 36$ (determinanten för C beräknas lätt då C är övertriangulär).

7. Om det är soligt en dag i Göteborg så är det chansen att det regnar nästa dag 0.6 och att det är soligt nästa dag 0.4. Om det är regnigt så är chansen att det fortsätter regna nästa dag 0.5, chansen att blir soligt nästa dag är 0.3 och annars snöar det. Om det snöar så är chansen att det fortsätter snöa 0.2, annars så regnar det. Hur stor andel av dagarna är soliga i genomsnitt om lång tid går?

7p

Svar: Vi ställer upp matrisen (eller snarare transponatet) och letar egenvektor med egenvärde 1.

$$R = \begin{pmatrix} 0.4 & 0.3 & 0 \\ 0.6 & 0.5 & 0.8 \\ 0 & 0.2 & 0.2 \end{pmatrix}.$$

Dvs vi tittar på nollrummet till

$$R = \begin{pmatrix} -0.6 & 0.3 & 0 \\ 0.6 & -0.5 & 0.8 \\ 0 & 0.2 & -0.8 \end{pmatrix}.$$

Detta nollrum spänns upp av $(2, 4, 1)^T$. Alltså så är andelen soldagar $\frac{2}{7}$.

8. Antag att i en given bas B så beskrivs den linjära avbildningen f (från $\mathbb{R}^5$ till $\mathbb{R}^5$) med matrisen

$$R = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Går det att beräkna den matris A som beskriver avbildningen i standardbasen utan att faktiskt veta B? Om det går så ge dels ett bevis för det, och dels ge matrisen (i standardbasen) explicit. Om det inte går, ge ett exempel på två olika baser B som skulle ge olika matriser A i standardbasen.

7p

SVAR: Antag att vi har basen B med basbytesmatris T. Då $R = 2I$ så gäller att $A = TRT^{-1} = T(2I)T^{-1} = 2I$. Alltså så är $A = R = 2I$.