Matematiska vetenskaper
Chalmers
Johan Björklund

Datum: 2017-08-19 Tid: 8:30-12:30
Hjälpmedel: Chalmersgodkänd miniräknare.
Telefonvakt: Adam Malik Tel.: ankn 5325

Tentamen i TMV206

Lösningarna skall presenteras på ett sådant sätt att räkningar och resonemang blir lätta att följa. Motivera dina svar. Gränserna är 20/30/40. Tentan har maximalt 50 poäng, därtill kommer poäng från MapleTA (max 4 poäng).

1. På denna uppgift ska enbart svar ges. En poäng per deluppgift.

   a) Finn en (nollskild) vektor ortogonal mot både $(1, 2, 2)^T$ och $(-1, 2, 5)^T$.

   b) Ge normalen till planet som bestäms av ekvationen $x + y + 15z = 0$

   c) Projicera vektorn $(1, 0, 3)^T$ ortogonalt på linjen som spänns upp av vektorn $(1, 1, 1)^T$.

   d) Bestäm skärningspunkten för linjerna $L_1(t) = (5, 5) + t(2, 2), L_2(s) = (0, 6) + s(1, -1)$.

   e) Beräkna $A^7 v$ om vi vet att v är en egenvektor till matrisen A med egenvärde -2.

   f) Beräkna determinanten för följande matris: $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$

6p

2. Varje påstående ska besvaras med sant eller falskt. Rätt svar ger $1p$, fel svar ger $-1p$ (inget svar ger $0p$). Man kan inte få mindre än 0 poäng på hela uppgiften.

   a) Om A och B är två matriser så är $A - B$ alltid definierad.

   b) Om A och B är två ickeinverterbara $n \times n$ matriser så saknar matrisen AB invers.

   c) Om både u och v var för sig är ortogonala mot vektorn w så är $u + v$ ortogonal mot w.

   d) Om v, u, w är en högerorienterad trippel av vektorer i $\mathbb{R}^3$ så är w, v, u vänsterorienterad.

   e) Vektorparet $(2, 3)^T$ och $(3, 2)^T$ utgör en bas för $\mathbb{R}^2$.

   f) För skalärprodukten gäller alltid att $v \cdot v = 0$

6p

3. Låt H vara planet definierat av $3x - y - z = 1$. Bestäm avståndet från H till punkten $P = (7, -1, -1)$.

6p

Var god vänd!

4. Låt $(1, 2, 0)$, $(2, 2, 4)$, $(-1, 1, 1)$ vara tre punkter i rummet. Hitta en fjärde punkt i rummet så att de fyra punkterna tillsammans bildar ett parallellogram. Bestäm sedan parallellogrammets area.

6p

5. Bestäm för vilka värden på a och b ekvationssystemet är lösbart. För de värden på a, b då det finns mer än en lösning, beräkna lösningarna.

$$x + 2y + 2az = 1$$

$$y + az = b$$

$$x + y + (2a - 1)z = 3$$

7p

6. Låt

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Bestäm vektorn x så att

$$B^{-1}(A^T B^T)^T x = (1, 2, -1)^T.$$

T står som vanligt för transponat.

6p

7. Låt

$$A = \begin{pmatrix} 10 & -2 \\ -2 & 7 \end{pmatrix}.$$

Beräkna A^{200}. Potenser av reella tal behöver inte räknas ut (så det är ok att svaret innehåller exempelvis $2 \cdot 15^9 + 11 \cdot 2^{91}$).

6p

8. Givet ett vektorrum $\mathbb{R}^n$ så säger vi att en (reell) $n \times n$ matris J är en komplex struktur på $\mathbb{R}^n$ om J har egenskapen att $J^2 = -I_n$ (I_n är som vanligt identitetsmatrisen).

För vilka värden på n finns det en komplex struktur på $\mathbb{R}^n$? Motivera noggrannt. Tips: Att tänka på de komplexa talen $\mathbb{C}$ som $\mathbb{R}^2$ och studera vad som händer när vi multiplicerar med i kanske kan ge någon idé.

7p