Matematiska vetenskaper	Datum: 2017-08-19	Tid: 8:30-12:30
Chalmers	Hjälpmedel: Chalmersgodkänd miniräknare.	
Johan Björklund	Telefonvakt: Adam Malik	Tel.: ankn 5325

Tentamen i TMV206

Lösningarna skall presenteras på ett sådant sätt att räkningar och resonemang blir lätta att följa. Motivera dina svar. Gränserna är 20/30/40. Tentan har maximalt 50 poäng, därtill kommer poäng från MapleTA (max 4 poäng).

1. På denna uppgift ska enbart svar ges. En poäng per deluppgift.

   a) Finn en (nollskild) vektor ortogonal mot både $(1, 2, 2)^T$ och $(-1, 2, 5)^T$.

   b) Ge normalen till planet som bestäms av ekvationen $x + y + 15z = 0$

   c) Projicera vektorn $(1, 0, 3)^T$ ortogonalt på linjen som spänns upp av vektorn $(1, 1, 1)^T$.

   d) Bestäm skärningspunkten för linjerna $L_1(t) = (5, 5) + t(2, 2), L_2(s) = (0, 6) + s(1, -1)$.

   e) Beräkna A^7v om vi vet att v är en egenvektor till matrisen A med egenvärde -2.

   f) Beräkna determinanten för följande matris: $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$

   6p

   SVAR:a) T.ex. $(6, -7, 4)$ (kryssprodukt)
   b) $(1, 1, 15)$
   c) $\frac{4}{3}(1, 1, 1)$
   d) $(3, 3)$
   e) -2^7v
   f) 13

2. Varje påstående ska besvaras med sant eller falskt. Rätt svar ger $1p$, fel svar ger $-1p$ (inget svar ger $0p$). Man kan inte få mindre än 0 poäng på hela uppgiften.

   a) Om A och B är två matriser så är $A - B$ alltid definierad.

   b) Om A och B är två ickeinverterbara $n \times n$ matriser så saknar matrisen AB invers.

   c) Om både u och v var för sig är ortogonala mot vektorn w så är $u + v$ ortogonal mot w.

   d) Om v, u, w är en högerorienterad trippel av vektorer i $\mathbb{R}^3$ så är w, v, u vänsterorienterad.

   e) Vektorparet $(2, 3)^T$ och $(3, 2)^T$ utgör en bas för $\mathbb{R}^2$.

   f) För skalärprodukten gäller alltid att $v \cdot v = 0$

   6p

   SVAR: a) Falskt, de måste ha samma storlek.
   b) Sant
   c) Sant
   d) Falskt
   e) Sant (determinanten är inte 0)
   f) Falskt

3. Låt H vara planet definierat av $3x - y - z = 1$. Bestäm avståndet från H till punkten $P = (7, -1, -1)$.

6p

SVAR: Avståndet är $2\sqrt{11}$. Kan ses t.ex. genom att gå från P i normalens riktning tills vi träffar planet i den närmaste punkten $(1, 1, 1)$.

4. Låt $(1, 2, 0)$, $(2, 2, 4)$, $(-1, 1, 1)$ vara tre punkter i rummet. Hitta en fjärde punkt i rummet så att de fyra punkterna tillsammans bildar ett parallellogram. Bestäm sedan parallellogrammets area.

6p

SVAR: Här finns flera möjliga svar då triangeln som bildas av de tre punkterna kan kompletteras till ett parallellogram på tre olika sätt. En strategi kan vara att välja ett hörn, A som det motsatta till hörnet vi söker, D. Återstående hörn kallas B, C. Då måste det gälla att $AD = AB + BD = AB + AC$. Vi får då $D = A + AB + AC$.
Om $A = (2, 2, 4)$ så blir $D = (-2, 1, -3)$.
Om $A = (1, 2, 0)$ så blir $D = (0, 1, 5)$.
Om $A = (-1, 1, 1)$ så blir $D = (4, 3, 3)$.
Arean kan bestämmas med längden av kryssprodukten av två sidvektorer med gemensamt hörn (speciellt inte beroende på vårt val av D. T.ex. $AB \times AC = |(4, -9, -1)| = \sqrt{98}$.

5. Bestäm för vilka värden på a och b ekvationssystemet är lösbart. För de värden på a, b då det finns mer än en lösning, beräkna lösningarna.

$$x + 2y + 2az = 1$$

$$y + az = b$$

$$x + y + (2a - 1)z = 3$$

7p

SVAR: $a \neq 1$ har alltid precis lösning (kan ses genom t.ex. determinanten, sålänge den inte är 0 så har vi en unik lösning). Fallet a=1 löses separat, då måste b=-2 för att lösning ska existera (via Gausselimination). Då har vi x=5,y=-2-t,z=t.

6. Låt

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Bestäm vektorn x så att

$$B^{-1}(A^T B^T)^T x = (1, 2, -1)^T.$$

T står som vanligt för transponat.

6p

SVAR: Vi vet att för transponering så gäller $(XY)^T = Y^TX^T$ och $(X^T)^T = X$. Då har vi i VL $B^{-1}BAx = Ax$. Detta ger att $x = A^{-1}(1, 2, -1)^T$. Vi bestämmer inversen till A.

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 3 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

Multiplikation med vektorn ger $x = (-2, -3, 2)$.

7. Låt

$$A = \begin{pmatrix} 10 & -2 \\ -2 & 7 \end{pmatrix}.$$

Beräkna A^{200}. Potenser av reella tal behöver inte räknas ut (så det är ok att svaret innehåller exempelvis $5^9\sqrt{3} + 2^91$).

6p

Vi bestämmer egenvärden och egenvektorer till matrisen. Vi ser att egenvärdena är $6, 11$. Motsvarande egenvektorer är $(1, 2)$ samt $(-2, 1)$. Vi vet då att

$$A = \begin{pmatrix} 10 & -2 \\ -2 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

Vi beräknar inversen:

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Vi har nu (om vi sätter B som egenvektorsmatrisen och D som diagonalmatrisen) $A^{200} = (BDB^{-1})^{200} = BD^{200}B^{-1}$. Alltså

$$A^{200} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6^{200} & 0 \\ 0 & 11^{200} \end{pmatrix} \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 6^{200} + 4 \cdot 11^{200} & 2 \cdot 6^{200} - 2 \cdot 11^{200} \\ 2 \cdot 6^{200} - 2 \cdot 11^{200} & 4 \cdot 6^{200} + 11^{200} \end{pmatrix}$$

8. Givet ett vektorrum $\mathbb{R}^n$ så säger vi att en (reell) $n \times n$ matris J är en komplex struktur på $\mathbb{R}^n$ om J har egenskapen att $J^2 = -I_n$ (I_n är som vanligt identitetsmatrisen).

För vilka värden på n finns det en komplex struktur på $\mathbb{R}^n$? Motivera noggrannt. Tips: Att tänka på de komplexa talen $\mathbb{C}$ som $\mathbb{R}^2$ och studera vad som händer när vi multiplicerar med i kanske kan ge någon idé.

7p

SVAR: Antag att vi har $J^2 = -I_n$. Då måste $det(J^2) = det(-I_n)$. För identitetsmatrisen så har vi att $det(-I_n) = (-1)^n$. Alltså så har vi $detJ^2 = (detJ)^2 = (-1)^n$. Om n är udda så har vi alltså att $(detJ)^2 = -1$. Det finns inget reellt tal som löser detta, så då determinanten av en reell matris är reell så ger detta en motsägelse.
Det återstår att visa att för jämna n så finns det faktiskt en komplex struktur. I fallet $n = 2$ så kan vi använda det vi vet om komplexa tal. Om vi tänker på det komplexa talet $a + bi$ som vektorn (a, b) så är det som händer då vi multiplicerar med i att vi får vektorn $(-b, a)$. Dvs vi har $J(a, b) = (-b, a)$ som exempel i dimension 2. Motsvarande matris blir då $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ För allmän jämn dimension så kan vi

använda samma metod. Vi tänker på en vektor $v = (v_1, v_2, \ldots, v_{2m}) \in R^{2m}$ som en följd av komplexa tal $(z_1, z_2, ..., z_m) \in \mathbb{C}^m$ (där $z_1 = v_1 + iv_2, z_2 = v_3 + iv_4$ osv). Att multiplicera varje komplext tal med i ger nu en linjär avbildning med den önskade egenskapen. Om vi skriver upp matrisen så ser vi att det blir en stor matris där nästan allting är noll utom steget ovanför diagonalen (om alternerar mellan -1 och 0) och steget nedanför (som alternerar mellan $1, 0$). Exempel i fallet $n = 12$ finns nedan.

$$\begin{pmatrix}
0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0
\end{pmatrix}$$