Matematiska vetenskaper
Chalmers tekniska högskola

Tentamen
2018-03-16, 14:00–18:00

TMV206: Linjär algebra

Examinator: Lukáš Malý, tel. 031 - 772 53 42
Telefonvakt: Maximilian Thaller, tel. 031 - 772 53 25
Hjälpmedel: Skrivdon och linjal, dock inga miniräknare

Betygsgränser: För betyg 3 krävs 20 p; för betyg 4 krävs 30 p; för betyg 5 krävs 40 p (utav 50 p).
Lösningsförslag publiceras på kurshemsidan idag kl. 20:00.
Granskningstillfälle meddelas via kurshemsidan och mail/meddelande från PING PONG.

OBS: Alla svar skall vara väl motiverade. Bristande motiveringar kan orsaka poängavdrag.

1. Betrakta linjen L vars ekvation på parameterform är $\begin{pmatrix}2\\5\\3\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$ och planet π som går genom punkterna $(3,0,0)$, $(2,1,-4)$ och $(0,-4,2)$. Avgör om L skär π. Om så är fallet, bestäm vinkeln mellan dem. Om så inte är fallet, beräkna avståndet mellan L och π. (6p)

2. Avgör för vilka reella värden på a som de tre vektorerna

$$\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}1\\4\\a\end{pmatrix} \quad \text{och} \quad \begin{pmatrix}a\\-3\\4\end{pmatrix}$$

är linjärt beroende, och skriv i vart och ett av dessa fall en av vektorerna som en linjär kombination av de övriga. (6p)

3. Bestäm en 2×2-matris A och en 2-vektor $\mathbf{b}$ så att den affina avbildning f, som är rotation av punkterna i planet vinkeln 45° moturs kring punkten $(1,0)$, ges av $f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}+\mathbf{b}$. (6p)

4. Låt

$$M = \begin{pmatrix}1 & -1 & 3 & 2\\ 3 & -1 & 10 & 2\\ 2 & 0 & 5 & 3\\ -2 & -2 & -6 & 4\end{pmatrix}.$$

Beräkna $\det(M^{-1})$. (4p)

5. Antag att $\mathcal{B} = (\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3)$ är en bas i $\mathbb{R}^3$ sådan att $\|\mathbf{v}_1\| = 2\sqrt{3}$, $\|\mathbf{v}_2\| = 1$, $\|\mathbf{v}_3\| = 4$ och vinkeln $\angle\mathbf{v}_1\mathbf{v}_2$ är 30°, vinkeln $\angle\mathbf{v}_1\mathbf{v}_3$ är 90°, och vinkeln $\angle\mathbf{v}_2\mathbf{v}_3$ är 60°.

(a) Beräkna $\mathbf{v}_1\cdot\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_1\cdot\mathbf{v}_3$ samt $\mathbf{v}_2\cdot\mathbf{v}_3$. (3p)

(b) Bestäm längden av vektorn $\mathbf{u}$ vars koordinater i basen $\mathcal{B}$ är $\mathbf{u}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}$. (3p)

Var god vänd!

6. Låt G vara en riktad graf vars grannmatris är

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Rita grafen och avgör huruvida den är starkt eller svagt sammanhängande eller ingetdera. Bestäm också övergångsmatrisen för slumpvandringen på G. (4p)

7. Låt $A = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} & 3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ och $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Beräkna $\lim_{n\to\infty} A^n\mathbf{u}$. (7p)

8. Antag att en $n \times n$-matris A är diagonaliserbar med egenvärdena $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$. Bevisa att $\det A = \lambda_1\lambda_2 \cdots \lambda_n$. (7p)

Tips: Börja med att bevisa påståendet för diagonala matriser, varefter diagonaliserbarheten kan utnyttjas.

Anmärkning: Man kunde också bevisa påståendet utan att förutsätta att A är diagonaliserbar, men beviset bleve något svårare (resp. en annan bevismetod vore lämpligare).

9. Betrakta följande MATLAB-funktion: (4p)

```
function svar = Untitled( grannmatris )
  storlek = size(grannmatris, 1);
  hjalpmatris = zeros(storlek);
  for i = 1:storlek
    hjalpmatris = hjalpmatris + grannmatris^i;
  end
  if min(min(hjalpmatris)) == 0
    svar = false;
  else
    svar = true;
  end
end
```

Antag att invariabeln är grannmatrisen för en riktad graf.

(a) Hur ska matrispotensen `grannmatris^i`, respektive `hjalpmatris` vid `i`:te iteration, tolkas? (Vad säger elementen i dessa matriser om den riktade grafen?)

(b) Vilken egenskap har grafen om funktionen ger svaret `true`?

(c) Hur kan **`for`**-slingan i skriptet optimeras? (MATLAB-syntaxen i ditt svar behöver inte vara 100% korrekt. Till och med duger det att svara med pseudokod)

Lycka till!

Värden av sinus och cosinus för några standardvinklar

α	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0