Matematiska vetenskaper
Chalmers tekniska högskola

Lösningsförslag till tentamen
2018-03-16, 14:00–18:00

TMV206: Linjär algebra

Uppgift 1. För att hitta en ekvation för planet π, så behöver man ta fram planets två riktningsvektorer, respektive en normalvektor till planet. Låt $P = (3, 0, 0)$, $Q = (2, 1, -4)$ och $R = (0, -4, 2)$. Planets riktningsvektorer blir t.ex.

$$\mathbf{u} = \overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad \mathbf{v} = \overrightarrow{PR} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Planets normalvektor beräknas m.h.a. kryssprodukten:

$$\tilde{\mathbf{n}} = \mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -14 \\ 14 \\ 7 \end{pmatrix} = -7 \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{n} = \frac{-1}{7}\tilde{\mathbf{n}} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Planets ekvation på normalform är då $2x - 2y - z + d = 0$, där värdet på d ska bestämmas så att punkterna P, Q och R uppfyller ekvationen. P:s koordinater i ekvationen ger

$$2 \cdot 3 - 2 \cdot 0 - 0 + d = 0 \quad \Leftrightarrow \quad d = -6\,.$$

Vi har alltså följande ekvationer:

$$L: \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \text{och} \qquad \pi: \quad 2x - 2y - z - 6 = 0\,.$$

Om L skär π, så finns det någon punkt (x, y, z) som uppfyller både L:s och π:s ekvation på en gång. Därför ska man försöka lösa ekvationssystemet:

$$\begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = 5 + t \\ z = 3 + 2t \\ 0 = 2x - 2y - z - 6 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad 2(2 + 2t) - 2(5 + t) - (3 + 2t) - 6 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -15 = 0,$$

vilket aldrig gäller. Således skär L inte π.

Då ska avståndet mellan linjen L och planet π beräknas. Låt S vara en godtycklig punkt på L, t.ex. $S = (2, 5, 3)$. Avståndet δ bestäms genom att ortogonalt projicera $\overrightarrow{PS} = (-1, 5, 3)^t$ på $\mathbf{n}$:

$$\delta = \|\overrightarrow{PS}_{\mathbf{n}}\| = \left\| \frac{\overrightarrow{PS} \cdot \mathbf{n}}{\|\mathbf{n}\|^2} \mathbf{n} \right\| = \frac{|\overrightarrow{PS} \cdot \mathbf{n}|}{\|\mathbf{n}\|} = \frac{|(-1)2 + 5(-2) + 3(-2)|}{\sqrt{2^2 + (-2)^2 + 1^2}} = \frac{15}{3} = 5\,.$$

Svar: Linjen L skär inte planet π. Avståndet mellan dem är 5 l.e.

Uppgift 2. Vektorerna är linjärt beroende om determinanten av den matris, som har vektorerna som sina kolumner, är lika med noll.

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & 4 & -3 \\ 2 & a & 4 \end{pmatrix} = /\text{Sarrus regel}/ = 16 - 6 + a^2 - 8a + 3a - 4 = a^2 - 5a + 6.$$

Ekvationen $a^2 - 5a + 6 = 0$ löses av $a = 2$ samt $a = 3$.

Låt nu $a = 2$. Vi ska hitta koefficienterna x och y sådana att

$$x\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix} + y\begin{pmatrix}1\\4\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\-3\\4\end{pmatrix} \quad\Leftrightarrow\quad \left(\begin{array}{cc|c}1&1&2\\1&4&-3\\2&2&4\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c}1&1&2\\0&3&-5\\0&0&0\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c}1&0&11/3\\0&1&-5/3\end{array}\right).$$

Svar (delvis):

$$a = 2 \quad\Rightarrow\quad \begin{pmatrix}2\\-3\\4\end{pmatrix} = \frac{11}{3}\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix} - \frac{5}{3}\begin{pmatrix}1\\4\\2\end{pmatrix}.$$

Om $a = 3$, så ska man hitta koefficienterna x och y sådana att

$$x\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix} + y\begin{pmatrix}1\\4\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\-3\\4\end{pmatrix} \quad\Leftrightarrow\quad \left(\begin{array}{cc|c}1&1&3\\1&4&-3\\2&3&4\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c}1&1&3\\0&3&-6\\0&1&-2\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c}1&1&3\\0&1&-2\\0&0&0\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c}1&0&5\\0&1&-2\end{array}\right).$$

Svar (resten):

$$a = 3 \quad\Rightarrow\quad \begin{pmatrix}3\\-3\\4\end{pmatrix} = 5\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix}1\\4\\3\end{pmatrix}.$$

Uppgift 3. Låt P vara rotationscentrumet, dvs. $P = (1, 0)$. Den affina avbildningen kan skrivas som sammansättningen $f = t_{\mathbf{a}} \circ r \circ t_{-\mathbf{a}}$, där r är rotation med 45° moturs kring origo, $t_{\dots}$ är translation och $\mathbf{a} = \overrightarrow{OP} = \binom{1}{0}$.

$$\begin{aligned} f(\mathbf{z}) = t_{\mathbf{a}}\Big(r\big(t_{-\mathbf{a}}(\mathbf{z})\big)\Big) = r\big(\mathbf{z} - \mathbf{a}\big) + \mathbf{a} &= \begin{pmatrix}\cos 45^\circ & -\sin 45^\circ\\ \sin 45^\circ & \cos 45^\circ\end{pmatrix}\left(\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right) + \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\\ -\frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}\end{aligned}$$

Svar:

$$A = \begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{pmatrix}1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\\ -\frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}.$$

Uppgift 4. Enligt räknelagar för determinanten är $\det(M^{-1}) = 1/\det(M)$. M är en 4×4-matris, så Gaußeliminationen ska utnyttjas för att beräkna dess determinant:

$$\det\begin{pmatrix}1&-1&3&2\\3&-1&10&2\\2&0&5&3\\-2&-2&-6&4\end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix}1&-1&3&2\\0&2&1&-4\\0&2&-1&-1\\0&-4&0&8\end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix}1&-1&3&2\\0&2&1&-4\\0&0&-2&3\\0&0&2&0\end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix}1&-1&3&2\\0&2&1&-4\\0&0&-2&3\\0&0&0&3\end{pmatrix}$$

Determinanten av en (över)triangulär matris är helt enkelt produkten av diagonalelementen. Således $\det M = 1 \cdot 2 \cdot (-2) \cdot 3 = -12$. Utifrån detta ser man att inversen M^{-1} existerar och man verkligen kan beräkna $\det(M^{-1}) = 1/\det(M)$.

Svar: $\det(M^{-1}) = \dfrac{-1}{12}$.

Uppgift 5. (a)

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 &= \|\mathbf{v}_1\| \cdot \|\mathbf{v}_2\| \cdot \cos(\angle \mathbf{v}_1\mathbf{v}_2) = 2\sqrt{3} \cdot 1 \cdot \cos(30^\circ) = 2\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 3\,, \\
\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_3 &= \|\mathbf{v}_1\| \cdot \|\mathbf{v}_3\| \cdot \cos(\angle \mathbf{v}_1\mathbf{v}_3) = 2\sqrt{3} \cdot 4 \cdot \cos(90^\circ) = 8\sqrt{3} \cdot 0 = 0\,, \\
\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_3 &= \|\mathbf{v}_2\| \cdot \|\mathbf{v}_3\| \cdot \cos(\angle \mathbf{v}_2\mathbf{v}_3) = 1 \cdot 4 \cdot \cos(60^\circ) = 4 \cdot \frac{1}{2} = 2\,.
\end{aligned}$$

(b) Först bestämmer man vektorn $\mathbf{u}$ utifrån dess koordinater i basen $\mathcal{B}$:

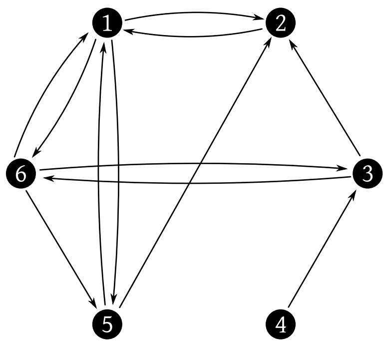
$$\mathbf{u} = \mathcal{B}\mathbf{u}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} | & | & | \\ \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_3 \\ | & | & | \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = 2\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3\,.$$

Nu kan man beräkna längden av $\mathbf{u}$ m.h.a. skalärprodukten:

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{u}\|^2 &= \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = (2\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3) \cdot (2\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3) \\
&= 4\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3 \cdot \mathbf{v}_3 - 4\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 + 4\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_3 - 2\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_3 \\
&= 4\|\mathbf{v}_1\|^2 + \|\mathbf{v}_2\|^2 + \|\mathbf{v}_3\|^2 - 4\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 + 4\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_3 - 2\mathbf{v}_2\mathbf{v}_3 \\
&= 4 \cdot 12 + 1 + 16 - 4 \cdot 3 + 4 \cdot 0 - 2 \cdot 2 = 48 + 1 + 16 - 12 - 4 = 49 = 7^2\,.
\end{aligned}$$

Svar: $\|\mathbf{u}\| = 7$.

Uppgift 6.



Grafen är inte starkt sammanhängande för det finns ingen kant som går mot nod 4.

Å andra sidan är grafen svagt sammanhängande (för den underliggande grafen är sammanhängande).

Övergångsmatrisen för slumpvandringen på G är

$$M = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}.$$

Uppgift 7. Man ska diagonalisera matrisen A för att lätt kunna beräkna A^n. Först tar man reda på egenvärdena:

$$\det(A - \lambda E) = \det\begin{pmatrix} \frac{5}{2} - \lambda & 3 \\ -1 & -1 - \lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - \frac{3}{2}\lambda + \frac{1}{2} = \left(\lambda - \tfrac{1}{2}\right)(\lambda - 1)\,.$$

Sedan finnes egenvektorer:

$$\lambda_1 = \tfrac{1}{2} \qquad \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & \frac{-3}{2} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad 2x + 3y = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix},$$

$$\lambda_2 = 1 \qquad \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad x + 2y = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Således kan man diagonalisera matrisen $A = PDP^{-1}$, där $P = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ och D är diagonalmatrisen med $\lambda_1 = \frac{1}{2}$ som första elementet och $\lambda_2 = 1$ som andra elementet på diagonalen.

Då är

$$A^n = PD^nP^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (\frac{1}{2})^n & 0 \\ 0 & 1^n \end{pmatrix} \underbrace{\frac{1}{\det P}}_{=-1} \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0{,}5^n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

och således

$$\begin{aligned} A^n\mathbf{u} &= \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0{,}5^n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0{,}5^n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0{,}5^n \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \cdot 0{,}5^n + 2 \\ 2 \cdot 0{,}5^n - 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Nu är man redo för att beräkna det önskade gränsvärdet,

$$\lim_{n\to\infty} A^n\mathbf{u} = \lim_{n\to\infty} \begin{pmatrix} -3 \cdot 0{,}5^n + 2 \\ 2 \cdot 0{,}5^n - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \cdot 0 + 2 \\ 2 \cdot 0 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Svar: $\lim\limits_{n\to\infty} A^n\mathbf{u} = \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ -1 \end{smallmatrix}\right)$.

Uppgift 8 (via diagonalisering)**.** Antag att D är en diagonalmatris, d.v.s.

$$D = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & d_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & d_n \end{pmatrix}.$$

Då är $\det D = d_1 d_2 d_3 \cdots d_n$. Det karakteristiska polynomet blir

$$\chi_D(\lambda) = \det(D - \lambda E) = (d_1 - \lambda)(d_2 - \lambda)(d_3 - \lambda) \cdots (d_n - \lambda).$$

Ekvationen $\chi_D(\lambda) = 0$ har därför n st rötter, nämligen $\lambda_i = d_i$ för alla heltal i mellan 1 och n. Således

$$\lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n = d_1 d_2 \cdots d_n = \det D.$$

På så sätt har man bevisat att påståendet är sant för diagonalmatriser.

Om A är diagonaliserbar, så kan man skriva $A = PDP^{-1}$, där D är en diagonalmatris. Då

$$\det(A) = \det(PDP^{-1}) = \det(P)\det(D)\det(P^{-1}) = \frac{\det(P)\det(D)}{\det(P)} = \det(D).$$

Det karakteristiska polynomet är

$$\begin{aligned} \chi_A(\lambda) &= \det(A - \lambda E) = \det(PDP^{-1} - P(\lambda E)P^{-1}) \\ &= \det\big(P(D - \lambda E)P^{-1}\big) = \frac{\det(P)\det(D - \lambda E)}{\det(P)} = \det(D - \lambda E) = \chi_D(\lambda). \end{aligned}$$

Egenvärdena till A är således lika med egenvärdena till D.

$$\det(A) = \det(D) = \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n.$$

V.S.B.

Anmärkning: Ifall matrisen A inte är diagonaliserbar, så kan man ändå överföra den till Jordans normalform, d.v.s. $A = PJP^{-1}$, där matrisen J har A:s egenvärden på diagonalen, nollor samt ettor på superdiagonalen, och nollor annanstans. Då är J en övertriangulär matris och beviset ovan funkar likadant fast med J istället för D.

Uppgift 9. (a) Elementet i r:te raden och k:te kolumnen i matrisen `grannmatris^i` ger antalet vägar av längden precis i från nod r till nod k.

Elementet i r:te raden och k:te kolumnen i matrisen `hjalpmatris` i slutet av i:te iteration ger antalet vägar av längden högst i (d.v.s. av längderna $1, 2, \ldots, i$) från nod r till nod k.

(b) Samtliga enkla vägar i en graf med `storlek` stycken noder har längden högst `storlek`. Det medför att om det inte finns någon väg mellan två noder, så förblir det motsvarande elementet i `hjalpmatris`:en lika med noll efter `storlek` iterationer.

Funktionen svarar `true` om alla elementen i `hjalpmatris`:en är nollskilda, d.v.s. ingen av elementen har förblivit noll, d.v.s. det finns vägar mellan varje par av noder. Med andra ord svaret är `true` om grafen är starkt sammanhängande.

(c) Problemet är att MATLAB tvingas beräkna allt högre potenser av `grannmatris`:en vid varje iteration. Det vore bättre att spara `grannmatris^i` vid ena iterationen och utnyttja den vid nästa iterationen. Till exempel kan hela `for`-slingan ersättas med följande kod:

```
grannmatrispotens = eye(storlek);
for i = 1:storlek
  grannmatrispotens = grannmatrispotens * grannmatris;
  hjalpmatris = hjalpmatris + grannmatrispotens;
end
```

Ett annat sätt för att undvika uträkning av allt högre potenser av `grannmatris`:en är att utgå från Horners schema:

$$A^n + A^{n-1} + A^{n-2} + \cdots + A^2 + A = (((\cdots(((A+I)A+I)A+I)A+\cdots)A+I)A+I)A\,.$$

Då skulle man modifiera definitionen av `hjalpmatris`:en och `for`-slingan:

```
hjalpmatris = grannmatris;
for i = 2:storlek
  hjalpmatris = (hjalpmatris + eye(storlek))*grannmatris;
end
```

Egentligen skulle det också gå bra att låta `hjalpmatris`:en initialiseras till nollor (som i det ursprungliga skriptet) och modifiera bara `for`-slingan:

```
for i = 1:storlek
  hjalpmatris = (hjalpmatris + eye(storlek))*grannmatris;
end
```