Matematiska vetenskaper
Chalmers tekniska högskola

Tentamen
2018-06-07, 14:00–18:00

TMV206: Linjär algebra

Examinator: Lukáš Malý, tel. 031 - 772 53 42
Telefonvakt: Barbara Schnitzer, tel. 031 - 772 53 25
Hjälpmedel: Skrivdon och linjal, dock inga miniräknare

Betygsgränser: För betyg 3 krävs 20 p; för betyg 4 krävs 30 p; för betyg 5 krävs 40 p (utav 50 p).
Lösningsförslag publiceras på kurshemsidan idag kl. 20:00.

OBS: Alla svar skall vara väl motiverade. Bristande motiveringar kan orsaka poängavdrag.

1. Betrakta linjerna L_1 och L_2 vars ekvationer på parameterform är (6p)

$$L_1: \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}, \qquad \text{och} \qquad L_2: \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ -7 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Avgör om L_1 skär L_2. Om så är fallet, bestäm skärningspunktens koordinater och vinkeln mellan linjerna (svara gärna med ett arcus-uttryck).
Om så inte är fallet, beräkna avståndet mellan linjerna.

2. Låt (5p)

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad \mathbf{w} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestäm arean av den triangel som **u** och **v** spänner upp.

(b) Bestäm volymen av den parallellepiped som **u**, **v** och **w** spänner upp.

3. Bestäm för vilket värde på b som följande ekvationssystem **inte** är lösbart: (6p)

$$\begin{cases} x + 3y + 5z = 4 - b \\ 2x + by + 8z = 3 \\ -x + 6y + bz = 4 \end{cases}$$

4. Bestäm matrisen för den linjära avbildning som avbildar (6p)

$$\text{vektorn } \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ på } \mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \text{och} \qquad \text{vektorn } \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ på } \mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

5. Låt (5p)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & -1 & -2 & -1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 0 & -6 \\ 2 & 11 & -4 & -14 \\ -1 & -1 & 4 & 16 \\ 1 & 1 & 0 & -14 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 5 & -7 & -2 & -4 \\ -7 & 8 & 3 & 3 \\ 2 & -2 & -1 & 0 \\ 3 & -4 & -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Beräkna $\det(ABC)$.

Tips: Det gäller att $CA = -I$, där I är den 4×4-identitetsmatrisen.

Var god vänd!

6. Betrakta en Markovkedja med två noder v_1 och v_2. Antag att sannolikheten att gå från v_1 till v_2 är a och sannolikheten att gå från v_2 till v_1 är b, där $a, b \in (0, 1)$ är givna tal. (5p + 1p)

(a) Bestäm övergångsmatrisen och beräkna Markovkedjans stationära fördelning.

(b) Enligt en förenklad språkmodell kan följden av bokstäver i en svensk text betraktas som en Markovkedja med två tillstånd: en bokstav i följden är antingen en vokal, eller en konsonant. Sannolikheten av att en vokal följs av en konsonant är 0,96, medan sannolikheten av att en konsonant följs av en vokal är 0,55. Beräkna sannolikheten att bokstaven som slumpmässigt tagits från en svensk text är en vokal, respektive en konsonant.

Anmärkning: Siffrorna i uppgiften (b) baseras på Victoria Benedictssons novell *En realist*. A. A. Markov gjorde en liknande analys av ryskan m.h.a. Pusjkins versroman Eugen Onegin.

7. Låt $A = \begin{pmatrix} 7 & 10 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}$ och $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 5 \\ c \end{pmatrix}$, där $c \in \mathbb{R}$. Bestäm värdet på c så att gränsvärdet $\lim\limits_{n\to\infty} A^n\mathbf{u}$ existerar. (6p)

8. Antag att matrisen A har egenvärden $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_k$ som alla är skilda från 2, d.v.s., matrisen $A - 2I$ är inverterbar. Hitta samtliga egenvärden till matrisen $A(A - 2I)^{-1}$. (6p)

Anmärkning: Man kan (men måste inte) bevisa att $A(A-2I)^{-1}$ har samma egenvektorer som matrisen A.

9. Betrakta följande MATLAB-funktion: (2p + 2p)

```
function svar = Untitled( grannmatris )
  storlek = size(grannmatris, 1);
  nygrannmatris = max(grannmatris, grannmatris');
  hjalpmatris = nygrannmatris;
  for i = 2:storlek
    hjalpmatris = hjalpmatris + nygrannmatris^i;
  end
  svar = +(hjalpmatris > 0);
end
```

Indata är grannmatrisen för en riktad graf.

(a) Hur ska matriserna `nygrannmatris` och `svar` tolkas? (Vad säger elementen i dessa matriser om grafen som angetts i indatan? Vilka grafer representeras av dessa matriser?)

(b) Nedan är ett förslag för att optimera **`for`**-slingan i skriptet:

```
for i = 1:ceil(log2(storlek))
  hjalpmatris = hjalpmatris^2 + nygrannmatris;
end
```

Avgör om den optimerade funktionen är korrekt, d.v.s., den returnerar samma `svar` som det ursprungliga skriptet.

Tips: Som underlag för ditt svar, så får du gärna undersöka `hjalpmatris`:en efter 1:a, 2:a, respektive 3:e iterationen, t.ex. genom att uttrycka `hjalpmatris`:en som summan av potenser av `nygrannmatris`.

Anmärkning: Kommandot `ceil(...)` är takfunktionen som avrundar uppåt till närmaste heltal. Kommandot `log2(...)` ger den binära logaritmen (2-logaritmen).

Lycka till!