# TMV206: Linjär algebra

**Uppgift 1.** Linjerna skär varandra om det finns någon punkt $(x, y, z)$ som uppfyller båda linjernas ekvationer samtidigt. Man ska alltså lösa det överbestämda ekvationssystemet

$$\begin{pmatrix}4\\0\\3\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6\\5\\-7\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}2\\3\\-6\end{pmatrix} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases}4 + 2t = 6 + 2s\\ -t = 5 + 3s\\ 3 + 2t = -7 - 6s\end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases}2t - 2s = 2\\ -t - 3s = 5\\ 2t + 6s = -10\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}2t - 2s = 2\\ -t - 3s = 5\\ 0 = 0\end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases}-8s = 12\\ t + 3s = -5\end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases}s = -1{,}5\\ t = -5 + 3\cdot 1{,}5\end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases}s = -1{,}5\\ t = -0{,}5\end{cases}$$

Ekvationssystemet har en (entydig) lösning, vilket innebär att linjerna skär varandra i punkten $(4, 0, 3) - 0{,}5 \cdot (2, -1, 2) = (6, 5, -7) - 1{,}5 \cdot (2, 3, -6) = (3, 1/2, 2)$.

Vinkeln bestäms m.h.a. skalärprodukten för linjernas riktningsvektorer $\mathbf{v}_1 = (2, -1, 2)^t$ och $\mathbf{v}_2 = (2, 3, -6)^t$.

$$\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = 4 - 3 - 12 = -11, \qquad \begin{aligned}\|\mathbf{v}_1\| &= \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2} = \sqrt{9} = 3,\\ \|\mathbf{v}_2\| &= \sqrt{2^2 + 3^2 + (-6)^2} = \sqrt{49} = 7.\end{aligned}$$

Således

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2}{\|\mathbf{v}_1\|\,\|\mathbf{v}_2\|} = \frac{-11}{3\cdot 7} = \frac{-11}{21} \quad\Rightarrow\quad \theta = \arccos\left(\frac{-11}{21}\right).$$

Svar: Linjerna $L_1$ och $L_2$ skär varandra i punkten $(3, 1/2, 2)$. Vinkeln mellan dem är $\arccos(-11/21)$.

**Uppgift 2.** (a) Arean av triangeln bestäms m.h.a. av kryssprodukten:

$$A = \frac{1}{2}\|\mathbf{u}\times\mathbf{v}\| = \frac{1}{2}\left\|\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}\right\| = \frac{1}{2}\left\|\begin{pmatrix}7\\-1\\-5\end{pmatrix}\right\| = \frac{\sqrt{7^2 + (-1)^2 + (-5)^2}}{2} = \frac{\sqrt{75}}{2} = \frac{5\sqrt{3}}{2} \text{ a.e.}$$

Svar: Triangelns area är $5\sqrt{3}/2$ a.e.

(b) Parallellepipedens volym beräknas m.h.a. trippelprodukten:

$$V = |(\mathbf{u}\times\mathbf{v})\cdot\mathbf{w}| = \left|\begin{pmatrix}7\\-1\\-5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-2\\1\\4\end{pmatrix}\right| = |-14 - 1 - 20| = 35 \text{ v.e.}$$

Alternativt kunde volymen beräknas som determinanten $V = |\det(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})|$.

Svar: Parallellepipedens volym är 35 v.e.

**Uppgift 3** (via Gaußelimination)**.** Man överför ekvationssystemets totalmatris till trappstegsform. Systemet saknar en lösning om högerledet blir en pivotkolumn.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 5 & 4-b \\ 2 & b & 8 & 3 \\ -1 & 6 & b & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 5 & 4-b \\ 0 & b-6 & -2 & 2b-5 \\ 0 & 9 & b+5 & 8-b \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 5 & 4-b \\ 0 & 9 & b+5 & 8-b \\ 0 & b-6 & -2 & 2b-5 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 5 & 4-b \\ 0 & 9 & b+5 & 8-b \\ 0 & 9(b-6) & -18 & 18b-45 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 5 & 4-b \\ 0 & 9 & b+5 & 8-b \\ 0 & 0 & -18-(b+5)(b-6) & 18b-45-(8-b)(b-6) \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 5 & 4-b \\ 0 & 9 & b+5 & 8-b \\ 0 & 0 & -b^2+b+12 & b^2+4b+3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 5 & 4-b \\ 0 & 9 & b+5 & 8-b \\ 0 & 0 & -(b-4)(b+3) & (b+1)(b+3) \end{array}\right)$$

Därav ser man att tredje kolumnen är fri ifall $b = 4$ eller $b = -3$. Om $b = -3$, så får man noll på högerledet i tredje raden, vilket gör att HL-kolumnen också blir fri och det finns oändligt många lösningar. Om $b = 4$, så får man en nollrad på VL med ett nollskilt tal (nämligen 35) på HL och då saknar systemet lösning.

Svar: Ekvationssystemet är olösbart om $b = 4$.

**Uppgift 3** (via determinanter)**.** Ekvationssystemet $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ har en unik lösning om och endast om koefficientmatrisen $A$ uppfyller $\det A \neq 0$. I uppgiften vill man inte få en unik lösning, varför man löser ut $b$ ur ekvationen $\det A = 0$. Determinanten beräknas m.h.a. Sarrus regel.

$$\det A = b^2 - 24 + 60 - 48 + 5b - 6b = b^2 - b - 12 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad b = -3 \text{ eller } b = 4.$$

Nu behöver man avgöra om ekvationssystemet har inga eller oändligt många lösningar för dessa värden på $b$. Uppenbarligen är de första två kolumnerna i matrisen $A$ linjärt oberoende (oavsett värdet på $b$). Ifall $b = -3$ eller 4, kan tredje kolumnen uttryckas som linjär kombination av de första två. Man behöver alltså bestämma om högerledsvektor också kan uttryckas som linjär kombination av de första två kolumnerna. Med andra ord ska man kolla om högerledsvektorn tillsammans med de första två är linjärt beroende (och det är de ifall determinanten är lika med noll).

$$b = -3: \qquad \det(VL_1, VL_2, HL) = \det\begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 2 & -3 & 3 \\ -1 & 6 & 4 \end{pmatrix} = -12 - 9 + 84 - 21 - 18 - 24 = 0.$$

Om $b = -3$, så kan HL uttryckas som en linjär kombination av kolumnerna i koefficientmatrisen och så är ekvationssystemet **lösbart**.

$$b = 4: \qquad \det(VL_1, VL_2, HL) = \det\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 3 \\ -1 & 6 & 4 \end{pmatrix} = 16 - 9 + 0 - 0 - 18 - 24 = -35 \neq 0.$$

Om $b = 4$, så kan HL **inte** uttryckas som en linjär kombination av kolumnerna i koefficientmatrisen och så är ekvationssystemet **olösbart**.

Svar: Ekvationssystemet är olösbart om $b = 4$.

**Uppgift 4** (via definitionen av matris-matris-multiplikation)**.** Man letar efter en $2 \times 2$-matris $A$ sådan att $A\mathbf{v}_1 = \mathbf{x}_1$ och $A\mathbf{v}_2 = \mathbf{x}_2$, d.v.s.

$$A\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \text{och} \qquad A\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Enligt definitionen av matris-matris-multiplikation är dessa två samband ekvivalenta med matris-ekvationen

$$A\begin{pmatrix}3 & 2\\ 4 & 3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & 1\end{pmatrix} \quad\Leftrightarrow\quad A = \begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 2\\ 4 & 3\end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & -2\\ -4 & 3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}7 & -5\\ 2 & -1\end{pmatrix}$$

Svar: $A = \begin{pmatrix}7 & -5\\ 2 & -1\end{pmatrix}$.

**Uppgift 4** (via ansats A=[a,b;c,d])**.** Man kan hitta matrisen $A$ genom att ansätta $A = \begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$ och sätta in denna i ekvationerna $A\mathbf{v}_1 = \mathbf{x}_1$ och $A\mathbf{v}_2 = \mathbf{x}_2$:

$$\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\ 4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3a+4b\\ 3c+4d\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix} \qquad \text{och} \qquad \begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\ 3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2a+3b\\ 2c+3d\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\ 1\end{pmatrix}.$$

På så sätt får man ett ekvationssystem med fyra ekvationer och fyra variabler:

$$\begin{cases}3a+4b=1\\ 3c+4d=2\\ 2a+3b=-1\\ 2c+3d=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}3a+4b=1\\ 2a+3b=-1\\ 3c+4d=2\\ 2c+3d=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\begin{pmatrix}3 & 4\\ 2 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix}3 & 4\\ 2 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c\\ d\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\ 1\end{pmatrix}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3 & 4\\ 2 & 3\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix}c\\ d\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3 & 4\\ 2 & 3\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}2\\ 1\end{pmatrix}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=7\\ b=-5\\ c=2\\ d=-1\end{cases}$$

Svar: $A = \begin{pmatrix}7 & -5\\ 2 & -1\end{pmatrix}$.

**Uppgift 5.** Enligt räknelagar för determinanten är $\det(C)\det(A) = \det(CA) = \det(-I) = (-1)^4$. Således blir $\det(ABC) = \det(A)\det(B)\det(C) = (-1)^4\det(B) = \det(B)$. $B$ är en $4\times 4$-matris, så Gaußeliminationen ska utnyttjas för att beräkna dess determinant:

$$\det(B) = \det\begin{pmatrix}1 & 7 & 0 & -6\\ 2 & 11 & -4 & -14\\ -1 & -1 & 4 & 16\\ 1 & 1 & 0 & -14\end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix}1 & 7 & 0 & -6\\ 0 & -3 & -4 & -2\\ 0 & 6 & 4 & 10\\ 0 & -6 & 0 & -8\end{pmatrix}$$
$$= \det\begin{pmatrix}1 & 7 & 0 & -6\\ 0 & -3 & -4 & -2\\ 0 & 0 & -4 & 6\\ 0 & 0 & 8 & -4\end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix}1 & 7 & 0 & -6\\ 0 & -3 & -4 & -2\\ 0 & 0 & -4 & 6\\ 0 & 0 & 0 & 8\end{pmatrix} = 1\cdot(-3)\cdot(-4)\cdot 8 = 96\,.$$

Svar: $\det(ABC) = 96$.

**Uppgift 6.** (a) Övergångsmatrisen är

$$M = \begin{pmatrix}1-a & a\\ b & 1-b\end{pmatrix}.$$

Den stationära fördelningen bestäms som egenvektorn till matrisen $M^t$ som svarar mot egenvärdet 1. Man behöver alltså lösa ut $x$ och $y$ ur ekvationssystemet

$$\begin{pmatrix} 1-a & b \\ a & 1-b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} -a & b \\ a & -b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

så att de normaliseras enligt $x + y = 1$. Då löser man ekvationssystemet

$$\begin{cases} ax - by = 0 \\ x + y = 1 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} (a+b)x = b \\ (-b-a)y = -a \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = \dfrac{b}{a+b} \\ y = \dfrac{a}{a+b} \end{cases}$$

Svar: Övergångsmatrisen är $M = \begin{pmatrix} 1-a & a \\ b & 1-b \end{pmatrix}$.

Den stationära fördelningsvektorn är $\mathbf{x}^t = \begin{pmatrix} \frac{b}{a+b} & \frac{a}{a+b} \end{pmatrix}$.

(b) Låt noden $v_1$ svara mot vokal, och noden $v_2$ mot konsonant. Då blir $a = 0{,}96$ och $b = 0{,}55$, där $a, b$ har samma betydelse som i deluppgiften (a). Den stationära fördelningen är

$$\mathbf{x}^t = \begin{pmatrix} \frac{b}{a+b} & \frac{a}{a+b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{0{,}55}{0{,}96+0{,}55} & \frac{0{,}96}{0{,}96+0{,}55} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{55}{151} & \frac{96}{151} \end{pmatrix} .$$

Svar: Sannolikheten att den slumpässigt valda bokstaven är en vokal är $\frac{55}{151}$ (d.v.s. 36,4 %), medan sannolikheten att det är en konsonant är $\frac{96}{151}$ (d.v.s. 63,6 %).

**Uppgift 7.** Antag att $\mathbf{v}_1$ och $\mathbf{v}_2$ är $A$:s egenvektorer som svarar mot egenvärdena $\lambda_1$ och $\lambda_2$. När $\mathbf{u}$ skrivs som en linjär kombination av dessa egenvektorer, d.v.s. $\mathbf{u} = a\mathbf{v}_1 + b\mathbf{v}_2$, där $a, b \in \mathbb{R}$ är vektorn $\mathbf{u}$:s koordinater i basen $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$, så

$$A^n\mathbf{u} = A^n(a\mathbf{v}_1 + b\mathbf{v}_2) = aA^n\mathbf{v}_1 + bA^n\mathbf{v}_2 = a\lambda_1^n\mathbf{v}_1 + b\lambda_2^n\mathbf{v}_2.$$

Om gränsvärdet ska existera, så får $a$ respektive $b$ bli nollskilt endast ifall $\lambda_1 \in (-1, 1]$ respektive $\lambda_2 \in (-1, 1]$. Låt oss därför bestämma $A$:s egenvärden och egenvektorer.

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} 7-\lambda & 10 \\ -3 & -4-\lambda \end{pmatrix} &= (7-\lambda)(-4-\lambda) - 10 \cdot (-3) \\ &= \lambda^2 - 3\lambda - 28 + 30 = \lambda^2 - 3\lambda + 2 = (\lambda - 1)(\lambda - 2) . \end{aligned}$$

Sedan finnes egenvektorer:

$$\lambda_1 = 1 \qquad \begin{pmatrix} 6 & 10 \\ -3 & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad 3x + 5y = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix},$$

$$\lambda_2 = 2 \qquad \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ -3 & -6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad x + 2y = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Om

$$\mathbf{u} = a\begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \text{så} \quad A^n\mathbf{u} = 1^n a\begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix} + 2^n b\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix} + 2^n b\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} .$$

Koordinaten $b$ måste vara lika med noll (annars existerar gränsvärdet ej), vilket innebär att vektorn $\mathbf{u}$ är en multipel av vektorn $\mathbf{v}_1$. Med andra ord,

$$\mathbf{u} = a\mathbf{v}_1 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 5 \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5a \\ -3a \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 5 = 5a \\ c = -3a \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} a = 1 \\ c = -3 \end{cases}$$

Om $c = -3$, så blir gränsvärdet $\lim_{n\to\infty} A^n\mathbf{u} = (5, -3)^t$.

Svar: $c = -3$.

**Uppgift 8** (utan likheten av egenvektorer). Eftersom matrisen $A - 2I$ är inverterbar, så kan man skriva om identitetsmatrisen $I = (A - 2I)(A - 2I)^{-1}$, vilket möjliggör att bryta ut $(A - 2I)^{-1}$ åt höger när man förenklar determinanten $\det(A(A - 2I) - \lambda I)$.

$$\begin{aligned}
\det\bigl(A(A-2I)^{-1} - \lambda I\bigr) &= \det\bigl(A(A-2I)^{-1} - \lambda(A-2I)(A-2I)^{-1}\bigr) \\
&= \det\bigl((A - \lambda(A-2I))(A-2I)^{-1}\bigr) \\
&= \det\bigl(A - \lambda(A-2I)\bigr)\det\bigl((A-2I)^{-1}\bigr) \\
&= \frac{\det\bigl(A - \lambda(A-2I)\bigr)}{\det(A-2I)} = \frac{\det\bigl((1-\lambda)A + 2\lambda I\bigr)}{\det(A-2I)},
\end{aligned}$$

där determinanten i nämnaren säkert är nollskild eftersom 2 inte är ett egenvärde till matrisen $A$. Således är $\det\bigl(A(A - 2I)^{-1} - \lambda I\bigr) = 0$ om och endast om

$$\frac{\det\bigl((1-\lambda)A + 2\lambda I\bigr)}{\det(A-2I)} = 0 \qquad \text{vilket är ekvivalent med} \qquad \det\bigl((1-\lambda)A + 2\lambda I\bigr) = 0.$$

I nästa steg vill man bryta ut faktorn $(1 - \lambda)$, vilket inte går bra ifall $\lambda = 1$. Man behöver alltså gör en enkel falluppdelning.

Fall 1 ($\lambda = 1$): $$\det\bigl((1-\lambda)A + 2\lambda I\bigr) = \det(2I) = 2^n \neq 0.$$

Därför är $\lambda = 1$ inte ett egenvärde till $A(A - 2I)$.

Fall 2 ($\lambda \neq 1$): $$\det\bigl((1-\lambda)A + 2\lambda I\bigr) = (1-\lambda)^n \det\Bigl(A + \frac{2\lambda}{1-\lambda}I\Bigr) = (1-\lambda)^n \det\Bigl(A - \frac{2\lambda}{\lambda-1}I\Bigr).$$

Således $\det\bigl((1 - \lambda)A + 2\lambda I\bigr) = 0$ om och endast om $\det\bigl(A - \frac{2\lambda}{\lambda-1}I\bigr) = 0$. När man kombinerar alla steg ovan, så har man visat ekvivalensen

$$\det\bigl(A(A-2I)^{-1} - \lambda I\bigr) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \det\Bigl(A - \frac{2\lambda}{\lambda-1}I\Bigr) = 0.$$

Det innebär att $\lambda$ är ett egenvärde till $A(A - 2I)^{-1}$ om och endast om talet $\frac{2\lambda}{\lambda-1}$ är ett egenvärde till matrisen $A$ (vars egenvärden betecknats $\mu_1, \ldots, \mu_k$). Det kvarstår att uttrycka $\lambda$ i termer av $\mu_j$:

$$\begin{aligned}
\frac{2\lambda}{\lambda-1} = \mu_j \quad \Leftrightarrow \quad 2\lambda = \mu_j(\lambda - 1) \quad &\Leftrightarrow \quad 2\lambda - \mu_j\lambda = -\mu_j \\
&\Leftrightarrow \quad (2-\mu_j)\lambda = -\mu_j \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = \frac{-\mu_j}{2-\mu_j} = \frac{\mu_j}{\mu_j - 2}.
\end{aligned}$$

Svar: Talen $\lambda_j = \frac{\mu_j}{\mu_j-2}$, där $j = 1, 2, \ldots, k$, är egenvärdena till matrisen $A(A - 2I)^{-1}$.

**Uppgift 8** (m.h.a. egenvektorer). Låt $\lambda$ och $\mathbf{v}$ vara ett egenpar till matrisen $A(A - 2I)^{-1}$. Definiera $\mathbf{u} = (A - 2I)^{-1}\mathbf{v}$. Eftersom $\mathbf{v} = (A - 2I)\mathbf{u}$, är $\mathbf{u}$ inte lika med nollvektorn. Då gäller det att

$$\begin{aligned}
A(A-2I)^{-1}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v} \quad &\Leftrightarrow \quad A\mathbf{u} = \lambda(A-2I)\mathbf{u} \\
&\Leftrightarrow \quad A\mathbf{u} = \lambda A\mathbf{u} - 2\lambda\mathbf{u} \quad \Leftrightarrow \quad (1-\lambda)A\mathbf{u} = -2\lambda\mathbf{u}.
\end{aligned}$$

Denna ekvation visar att $\lambda \neq 1$ eftersom man annars skulle få ett ogiltigt samband $\mathbf{0} = -2\mathbf{u}$. Man har alltså visat sambandet $A\mathbf{u} = \frac{2\lambda}{\lambda-1}\mathbf{u}$. Med andra ord är talet $\frac{2\lambda}{\lambda-1}$ ett egenvärde till matrisen $A$ med egenvektorn $\mathbf{u}$. Således

$$\frac{2\lambda}{\lambda - 1} = \mu_j \quad \Leftrightarrow \quad 2\lambda = \mu_j(\lambda - 1) \quad \Leftrightarrow \quad \lambda(2 - \mu_j) = -\mu_j \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = \frac{\mu_j}{\mu_j - 2}$$

för något $j = 1, 2, \ldots, k$. Dessutom ser man att

$$\mathbf{v} = (A - 2I)\mathbf{u} = A\mathbf{u} - 2\mathbf{u} = \mu_j\mathbf{u} - 2\mathbf{u} = (\mu_j - 2)\mathbf{u},$$

vilket visar att matriserna $A$ och $A(A - 2I)^{-1}$ har likadana egenvektorer.

Svar: Talen $\lambda_j = \frac{\mu_j}{\mu_j-2}$, där $j = 1, 2, \ldots, k$, är egenvärdena till matrisen $A(A - 2I)^{-1}$.

**Uppgift 9.** (a) `nygrannmatris` är grannmatrisen för den underliggande grafen (där man behållit kanter från en nod till sig själv). Elementet i $r$:te raden och $k$:te kolumnen i matrisen `svar` innehåller 1 om det finns någon väg från nod $r$ till nod $k$ i den underliggande grafen. Med andra ord är matrisen `svar` grannmatrisen för det sammanhängande höljet av den underliggande grafen.

(b) För korthetens skull ska `hjalpmatris`:en efter i:te iteration enligt det ursprungliga skriptet betecknas med $H_i$, `hjalpmatris`:en efter i:te iteration enligt det nya skriptet med $K_i$ och `nygrannmatris`:en med $N$. Då gäller det att

$$\begin{aligned}
H_2 &= \sum_{j=1}^{2} N^j; \quad K_1 = N^2 + N = \sum_{j=1}^{2} c_{1,j}N^j \\
H_4 &= \sum_{j=1}^{4} N^j; \quad K_2 = K_1^2 + N = N^4 + 2N^3 + N^2 + N = \sum_{j=1}^{2^2} c_{2,j}N^j \\
H_8 &= \sum_{j=1}^{8} N^j; \quad K_3 = K_2^2 + N = N^8 + 4N^7 + 6N^6 + 6N^5 + 5N^4 + 2N^3 + N^2 + N = \sum_{j=1}^{2^3} c_{3,j}N^j \\
&\vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\
H_{2^i} &= \sum_{j=1}^{2^i} N^j; \quad K_i = K_{i-1}^2 + N = \sum_{j=1}^{2^i} c_{i,j}N^j,
\end{aligned}$$

där koefficienterna $c_{i,j}$ är positiva heltal.

Medan elementen i matriserna $H_i$ anger antalet vägar av längden högst $i$ i den underliggande grafen, så anger elementen i matriserna $K_i$ antalet multiplicerat med positiva konstanter för vägar av längden högst $2^i$. Det man vill ta reda på är huruvida det finns någon väg mellan noder oavsett vägens längd och oavsett exakta antalet sådana vägar, så det går alldeles bra att använda sig av $K_i$ för att skapa matrisen `svar`.

Sista iterationen i det nya skriptet svarar mot vägar av längden högst

$$2^{\lceil \log_2 \texttt{storlek} \rceil} \geq 2^{\log_2 \texttt{storlek}} = \texttt{storlek},$$

så övre gränsen för variabeln i i for-slingan funkar också bra, ty varje två noder med en väg sinsemellan i den underliggande grafen kan kopplas ihop med en väg av längden högst `storlek` $- 1$.

Svar: Den optimerade funktionen returnerar samma `svar` som den ursprungliga versionen.