Matematiska vetenskaper
Chalmers tekniska högskola

Tentamen
2018-08-27, 14:00–18:00

TMV206: Linjär algebra

Examinator: Lukáš Malý, tel. 031 - 772 53 42
Telefonvakt: Carl Lundholm, tel. 031 - 772 67 92
Hjälpmedel: Skrivdon och linjal, dock inga miniräknare

Betygsgränser: För betyg 3 krävs 20 p; för betyg 4 krävs 30 p; för betyg 5 krävs 40 p (utav 50 p).
Lösningsförslag publiceras på kurshemsidan idag kl. 20:00.

OBS: Alla svar skall vara väl motiverade. Bristande motiveringar kan orsaka poängavdrag.

1. Beräkna avståndet från punkten $(3, 4, -1)$ till det plan som går genom punkterna $(1, -2, 3)$, $(-3, 2, 1)$ och $(-1, -2, 1)$. (6p)

2. Låt $P = (3, 3, 15)$, $Q = (2, 11, 19)$ och $R = (11, 2, 19)$. (6p)

(a) Bestäm alla vinklarna i triangeln $\triangle PQR$.

(b) Beräkna arean av triangeln $\triangle PQR$.

3. Låt f vara den linjära avbildning av planet som roterar **medurs** vinkeln 60° kring origo. Låt g vara den linjära avbildning av planet som speglar i linjen $x = 0$. (6p)

(a) Bestäm matrisen för den sammansatta avbildning som först avbildar med f och sedan med g.

(b) Bestäm matrisen för den sammansatta avbildning som först avbildar med g^{-1} och sedan med f^{-1}.

4. Låt (6p)

$$\mathbf{u} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 8 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad \mathbf{w} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 4 \\ -7 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

(a) Visa att $\mathcal{B} = \{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$ är en bas i $\mathbb{R}^3$.

(b) Avgör om $\mathcal{B}$ är en ON-bas.

(c) Vektorn **a** har koordinaterna $(1, 0, 2)$ i standardbasen. Bestäm dess koordinater i basen $\mathcal{B}$.

5. Bestäm $\det(AB^2)$, där (5p)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 6 & -5 \\ -3 & 3 & 2 & 4 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & -6 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad B = \begin{pmatrix} -32 & -57 & -42 & -60 \\ 22 & 39 & 22 & 38 \\ 6 & 11 & 4 & 10 \\ -8 & -14 & -2 & -11 \end{pmatrix},$$

då man i förväg vet att

$$A^{-1}BA = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Var god vänd!

6. Betrakta den riktade grafen $G = (V, E)$ med nodmängden $V = \{1, 2, 3, 4\}$ och kantmängden $E = \{(1, 3), (3, 2), (2, 1), (2, 4), (4, 2)\}$. (5p)

(a) Rita grafen och bestäm dess grannmatris.

(b) Ange övergångsmatrisen för slumpvandringen på G.

(c) Bestäm den stationära fördelningen för slumpvandringen.

7. Låt $A = \begin{pmatrix} -9 & 6 \\ -12 & 8 \end{pmatrix}$ och $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Beräkna $A^{64}\mathbf{u}$. (6p)

8. Antag att en $n \times n$-matris A uppfyller matrisekvationen $A + 2A^2 - A^3 = 2I$. (6p)

(a) Hitta alla reella tal som möjligtvis kan vara egenvärden till matrisen A.

(b) Avgör om matrisen A är inverterbar.

9. Betrakta följande MATLAB-funktion: (4p)

```
function losning = neumannserie( VLmatris, HLvektor )
  tolerans = 0.00001 * (1 - norm(VLmatris));
  k = 0;
  hjalpvektor = HLvektor;
  losning = hjalpvektor;
  while norm(hjalpvektor) > tolerans
    k = k+1;
    hjalpvektor = VLmatris^k * HLvektor;
    losning = losning + hjalpvektor;
  end
end
```

Funktionen beräknar en approximativ lösning till ekvationssystemet $(I - A)\mathbf{x} = \mathbf{b}$, där matrisen A anges som `VLmatris` och högerledsvektorn $\mathbf{b}$ anges som `HLvektor`.

(a) Genom att provköra funktionen med några utvalda 5000×5000-matriser har man upptäckt att funktionen är fruktansvärt långsam (jämfört med Gaußeliminationen). Förklara varför det är så och föreslå hur **`while`**-slingan i skriptet kan optimeras. (MATLAB-syntaxen i ditt svar behöver inte vara 100% korrekt. Till och med duger det att svara med pseudokod.)

(b) När funktionen körs med `VLmatris = [4, 1; -1, 5]` och `HLvektor = [1; 2]`, så returnerar den `losning = [NaN; NaN]`, vilket säkert inte är någon approximativ lösning till ekvationsystemet $(I - A)\mathbf{x} = \mathbf{b}$, d.v.s. till ekvationssystemet $\begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 1 & -4 \end{pmatrix} \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Förklara varför funktionen fallerar för denna koefficientmatris och denna högerledsvektor.

Lycka till!

Värden av sinus och cosinus för några standardvinklar

α	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$	$120°$	$135°$	$150°$	$180°$
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{-1}{2}$	$\frac{-\sqrt{2}}{2}$	$\frac{-\sqrt{3}}{2}$	-1