Matematiska vetenskaper
Chalmers tekniska högskola

Lösningsförslag till tentamen
2018-08-27, 14:00–18:00

TMV206: Linjär algebra

Uppgift 1. Avståndet beräknas som längden av projektionen av en vektor, som börjar i punkten $A = (3, 4, -1)$ och går mot någon punkt i planet, på planets normal. Normalen kan hittas m.h.a. kryssprodukten av två av planets riktningsvektorer. Antag att de givna tre punkterna betecknas med P, Q och R. Då blir

$$\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{PR} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR} = \begin{pmatrix} -8 \\ -4 \\ 8 \end{pmatrix} = -4 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Normalvektorn är alltså $\mathbf{n} = (2, 1, -2)^t$. Avståndet blir

$$d = \left\| \frac{\overrightarrow{AP} \bullet \mathbf{n}}{\|\mathbf{n}\|^2} \mathbf{n} \right\| = \frac{|\overrightarrow{AP} \bullet \mathbf{n}|}{\|\mathbf{n}\|} = \frac{|(-2, -6, 4) \bullet (2, 1, -2)|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + (-2)^2}} = \frac{|-4-6-8|}{3} = \frac{18}{3} = 6 \text{ l.e.}$$

Svar: Avståndet från punkten $(3, 4, -1)$ till planet är 6 l.e.

Uppgift 2.

$$\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} -1 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix}, \qquad \overrightarrow{PR} = \begin{pmatrix} 8 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad \text{och} \qquad \overrightarrow{QR} = \begin{pmatrix} 9 \\ -9 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Vinklarna bestäms m.h.a. skalärprodukten.

$$\alpha = \angle P: \qquad \cos\alpha = \frac{\overrightarrow{PQ} \bullet \overrightarrow{PR}}{\|\overrightarrow{PQ}\| \cdot \|\overrightarrow{PR}\|} = \frac{-8-8+16}{9 \cdot 9} = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha = 90^\circ;$$

$$\beta = \angle Q: \qquad \cos\beta = \frac{\overrightarrow{QP} \bullet \overrightarrow{QR}}{\|\overrightarrow{QP}\| \cdot \|\overrightarrow{QR}\|} = \frac{9+72+0}{9 \cdot 9\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \Rightarrow \quad \beta = 45^\circ;$$

$$\gamma = \angle R: \qquad \gamma = 180^\circ - \alpha - \beta = 180^\circ - 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ.$$

(b) Triangeln är rätvinklig med kateterna PQ och PR. Arean är alltså

$$A = \frac{1}{2}\|PQ\| \cdot \|PR\| = \frac{9 \cdot 9}{2} = \frac{81}{2} \text{ a.e.}$$

Anmärkning: Alternativt skulle man kunna beräkna arean m.h.a. kryssprodukten, nämligen

$$A = \frac{1}{2}\|\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}\| \quad \text{eller} \quad A = \frac{1}{2}\|\overrightarrow{QP} \times \overrightarrow{QR}\| \quad \text{eller} \quad A = \frac{1}{2}\|\overrightarrow{RQ} \times \overrightarrow{RP}\|.$$

Uppgift 3. Låt avbildningen f representeras av matrisen A, medan avbildningen g av matrisen B. Då ger bassatsen och figur att

$$A = \begin{pmatrix} \cos(60^\circ) & \sin(60^\circ) \\ -\sin(60^\circ) & \cos(60^\circ) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & \sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix} \qquad \text{och} \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Sammansättningen $g \circ f$ representeras av matrisprodukten BA, d.v.s.

$$BA = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & \sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

(b) Sammansättningen $f^{-1} \circ g^{-1}$ representeras av matrisen $A^{-1}B^{-1} = (BA)^{-1}$, d.v.s.

$$(BA)^{-1} = \begin{pmatrix} -1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{-1} \begin{pmatrix} 1/2 & \sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Uppgift 4. (a) Varje bas i $\mathbb{R}^3$ består av en trippel av vektorer som är linjärt oberoende. $\mathcal{B}$ har 3 st vektorer, så man behöver bara avgöra huruvida de är linjärt oberoende.

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} | & | & | \\ \mathbf{u} & \mathbf{v} & \mathbf{w} \\ | & | & | \end{pmatrix} &= \frac{1}{9^3} \det \begin{pmatrix} 8 & 1 & 4 \\ 4 & -4 & -7 \\ 1 & 8 & -4 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{9^3} \big(8(-4)(-4) + 1(-7)1 + 4 \cdot 4 \cdot 8 - 1(-4)4 - 8(-7)8 - (-4)4 \cdot 1\big) \\ &= \frac{128 - 7 + 128 + 16 + 448 + 16}{9^3} = \frac{729}{9^3} = 1 \neq 0 \end{aligned}$$

Vektorerna $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ och $\mathbf{w}$ är alltså linjärt oberoende, så $\mathcal{B}$ är en bas i $\mathbb{R}^3$.

(b) Man ska bestämma om vektorerna är parvis vinkelräta och om deras längder är lika med 1.

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \bullet \mathbf{v} &= \frac{1}{81}(8 \cdot 1 + 4 \cdot (-4) + 1 \cdot 8) = 0, & \|\mathbf{u}\| &= \frac{\sqrt{8^2 + 4^2 + 1^2}}{9} = \frac{\sqrt{81}}{9} = 1, \\ \mathbf{u} \bullet \mathbf{w} &= \frac{1}{81}(8 \cdot 4 + 4 \cdot (-7) + 1 \cdot (-4)) = 0, & \|\mathbf{v}\| &= \frac{\sqrt{1^2 + (-4)^2 + 8^2}}{9} = \frac{\sqrt{81}}{9} = 1, \\ \mathbf{v} \bullet \mathbf{w} &= \frac{1}{81}(1 \cdot 4 + (-4) \cdot (-7) + 8 \cdot (-4)) = 0, & \|\mathbf{w}\| &= \frac{\sqrt{4^2 + (-7)^2 + (-4)^2}}{9} = \frac{\sqrt{81}}{9} = 1. \end{aligned}$$

Basen $\mathcal{B}$ är alltså en ON-bas.

(c) Låt B vara den matris vars kolonner är $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ och $\mathbf{w}$. Om E är standardbasen, så $\mathbf{a}_E = B\mathbf{a}_B$, vilket gör att $\mathbf{a}_B = B^{-1}\mathbf{a}_E$. Eftersom $\mathcal{B}$ är en ON-bas, gäller att $B^{-1} = B^t$. De sökta koordinaterna blir

$$\mathbf{a}_B = B^t \mathbf{a}_E = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 8 & 4 & 1 \\ 1 & -4 & 8 \\ 4 & -7 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 10 \\ 17 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Anmärkning: Alternativt kan koordinaterna beräknas m.h.a. skalärprodukten (eftersom $\mathcal{B}$ är en ON-bas), nämligen $\mathbf{a} \bullet \mathbf{u} = \frac{10}{9}$, $\mathbf{a} \bullet \mathbf{v} = \frac{17}{9}$ och $\mathbf{a} \bullet \mathbf{w} = \frac{-4}{9}$ är koordinaterna för $\mathbf{a}$ i basen $\mathcal{B}$.

Uppgift 5. Determinanten av en diagonalmatris är lika med produkten av diagonalelementen, så $\det(A^{-1}BA) = 1 \cdot (-1) \cdot 2 \cdot (-2) = 4$. Enligt räkneregler för determinanter är

$$\det(A^{-1}BA) = (\det A)^{-1} \det B \det A = \det B, \quad \text{så} \quad \det B = 4.$$

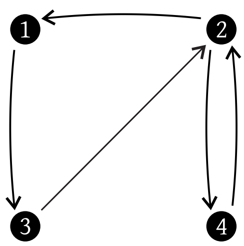
Eftersom $\det(AB^2) = \det A(\det B)^2 = 16\det A$, kvarstår det bara att beräkna determinanten av matrisen A, vilket görs m.h.a. eliminationen.

$$\det\begin{pmatrix} 1 & -3 & 6 & -5 \\ -3 & 3 & 2 & 4 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & -6 & -2 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 1 & -3 & 6 & -5 \\ 0 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & -2 & 7 & -4 \\ 0 & 7 & -24 & 13 \end{pmatrix}$$

$$= \det\begin{pmatrix} 1 & -3 & 6 & -5 \\ 0 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -1 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 1 & -3 & 6 & -5 \\ 0 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = 1\cdot 1\cdot(-1)\cdot(-1) = 1$$

Svar: $\det(AB^2) = 16$.

Uppgift 6. (a)



$$G = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(b)

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(c) Den stationära fördelningen fås som den normerade egenvektorn för matrisen M^t som svarar mot egenvärdet 1. Således löses ekvationssystemet $(M^t - I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Gauß–Jordan-eliminationen ger

$$M^t - I = \begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & \frac{-1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & \frac{1}{2} & -1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & \frac{-1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & \frac{-1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & \frac{-1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Den sökta egenvektorn är $\mathbf{v} = (t, 2t, t, t)$ för något tal $t \in \mathbb{R}$. En fördelning anger sannolikheten att man befinner sig i respektive noder, vilket innebär att summan av elementen i den stationära fördelningen ska vara lika med 1, d.v.s., $t + 2t + t + t = 1$. Således $t = 1/5$.

Svar: Den stationära fördelningen är $\mathbf{x}^t = (\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5})$.

Uppgift 7. Om man noterar att $A^2 = -A$, så får man helt enkelt att

$$A^{64} = (A^2)^{32} = (-A)^{32} = (-1)^{32}A^{32} = A^{32} = (A^2)^{16} = \cdots = (-A)^2 = (-1)^2A^2 = A^2 = -A.$$

Så $A^{64}\mathbf{u} = -A\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 9 & -6 \\ 12 & -8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 16 \end{pmatrix}$.

Om man inte noterar att $A^2 = -A$, så kan man diagonalisera matrisen A för att kunna beräkna godtyckliga heltalspotenser av den. Låt oss börja med att bestämma matrisens egenvärden.

$$\det(A - \lambda I) = \det\begin{pmatrix} -9-\lambda & 6 \\ -12 & 8-\lambda \end{pmatrix} = (-9-\lambda)(8-\lambda) - 6\cdot(-12) = \lambda^2 + \lambda = \lambda(\lambda+1).$$

Egenvärdena är alltså $\lambda_1 = 0$ och $\lambda_2 = -1$. Nu ska man bestämma motsvarande egenvektorer.

$$\lambda_1 = 0: \qquad \begin{pmatrix} -9-0 & 6 \\ -12 & 8-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 & 6 \\ -12 & 8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_2 = -1: \qquad \begin{pmatrix} -9+1 & 6 \\ -12 & 8+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & 6 \\ -12 & 9 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Låt $P = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$. Då blir

$$P^{-1} = \frac{1}{\det P}\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{-1}\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}.$$

Således $A = PDP^{-1}$, där $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ och så

$$\begin{aligned} A^{64} &= (PDP^{-1})^{64} = PD^{64}P^{-1} = P\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & (-1)^{64} \end{pmatrix}P^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -6 \\ 12 & -8 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Därför

$$A^{64}\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 9 & -6 \\ 12 & -8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 16 \end{pmatrix}.$$

Uppgift 8. (a) Låt $\lambda \in \mathbb{C}$ vara ett egenvärde av matrisen A med egenvektorn $\mathbf{v}$. Då gäller att $I\mathbf{v} = \mathbf{v}$, $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$, $A^2\mathbf{v} = A(A\mathbf{v}) = A(\lambda\mathbf{v}) = \lambda^2\mathbf{v}$ och $A^3\mathbf{v} = \lambda^3\mathbf{v}$. När den givna ekvationen multipliceras med $\mathbf{v}$ från höger, så får man

$$\begin{aligned} &A\mathbf{v} + 2A^2\mathbf{v} - A^3\mathbf{v} = 2I\mathbf{v} \quad \Leftrightarrow \quad \lambda\mathbf{v} + 2\lambda^2\mathbf{v} - \lambda^3\mathbf{v} = 2\mathbf{v} \quad \Leftrightarrow \quad \lambda^3\mathbf{v} - 2\lambda^2\mathbf{v} - \lambda\mathbf{v} + 2\mathbf{v} = \mathbf{0} \\ &\Leftrightarrow \quad (\lambda^3 - 2\lambda^2 - \lambda + 2)\mathbf{v} = \mathbf{0} \quad \overset{\mathbf{v}\neq\mathbf{0}}{\Longleftrightarrow} \quad \lambda^3 - 2\lambda^2 - \lambda + 2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda^2(\lambda-2) - (\lambda-2) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad (\lambda^2 - 1)(\lambda - 2) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (\lambda+1)(\lambda-1)(\lambda-2) = 0. \end{aligned}$$

Svar: Om en matris uppfyller den givna ekvationen, så kan dess egenvärden vara -1, 1 och 2 och inget annat.

(b) Eftersom 0 inte är med bland de möjliga egenvärdena, är matrisen A inverterbar.

Anmärkning: Om man inte klarat av deluppgiften (a), så kan man undersöka inverterbarheten på ett annat sätt. Matrisen A är nämligen inverterbar om och endast om $A\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ för alla $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$. Man kan alltså bestämma vilka vektorer $\mathbf{v}$ som uppfyller $A\mathbf{v} = \mathbf{0}$.
Antag att $A\mathbf{v} = \mathbf{0}$ och multiplicera den givna ekvationen med $\mathbf{v}$ från höger. Då får man

$$A\mathbf{v} + 2A^2\mathbf{v} - A^3\mathbf{v} = 2I\mathbf{v} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{0} + 2A\mathbf{0} - A^2\mathbf{0} = 2\mathbf{v} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{0} = \mathbf{v}.$$

Det finns alltså en enda vektor $\mathbf{v}$ som ger $A\mathbf{v} = \mathbf{0}$ och det är $\mathbf{v} = \mathbf{0}$. Således är A inverterbar.

Uppgift 9. (a) I slingan beräknas höga potenser av den stora matrisen `VLmatris`, vilket kräver ett antal matris-matris-multiplikationer som tar sin tid. Dessa potenser kan ersättas med matris-vektor-multiplikationer då man återanvänder `hjalpvektorn` från föregående steg. T.ex. så här:

```
while norm(hjalpvektor) > tolerans
  hjalpvektor = VLmatris * hjalpvektor;
  losning = losning + hjalpvektor;
end
```

(b) Neumannserien

$$(I - A)^{-1}\mathbf{b} = \sum_{k=0}^{\infty} A^k \mathbf{b}$$

konvergerar för alla högerledsvektorer $\mathbf{b}$ bara om matrisen A har liten norm. Det som behövs för att kunna garantera konvergens är alltså att $\|A\| < 1$.
Den givna matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$$

har en stor norm, vilket gör att `toleransen` blir negativt och villkoret

```
norm(hjalpvektor) > tolerans
```

är alltid uppfyllt. Dessutom växer termerna $A^k\mathbf{b}$ exponentiellt då k växer. Således avbryts `while`-slingan inte förrän ett undantag händer, medan `losning` växer över det högsta möjliga tal som MATLAB kan hantera (p.g.a. ”integer overflow” ersätts några element med `Inf`, d.v.s. ∞, och sedan skulle man behöva beräkna `Inf - Inf` vilket ger `NaN`).