Diskret matematik D ht 2005: Veckoblad läsvecka 2

1. Funktionen $f : A \to [\frac{7}{2}, 4]$ given av

$$f(x) = x^3 - \frac{9}{2}x^2 + 6x + \frac{3}{2}$$

   är bijektiv. Ange A.

2. Låt A vara mängden av positiva reella tal och låt R vara en relation på $A \times A$ given av att $(x, y)R(u, v)$ då $x + v = y + u$. Visa att R är en ekvivalensrelation och beskriv ekvivalensklasserna geometriskt. (När man i talteorin definierar de reella talen utgår man från de positiva heltalen utifrån vilka man i tur och ordning definierar de positiva rationella talen, de positiva reella talen och sedan de reella talen. Vid det sista av dessa steg definierar man de reella talen som familjen av ekvivalensklasser under relationen R ovan. För den intresserade finns alla detaljer i bokens kapitel 4.)

3. Visa att det för varje heltal $n \geq 16$ gäller att man kan finna två positiva heltal k och m sådana att $n = 3k + 5m$.

4. Definiera följen $f(1), f(2), f(3), \ldots$ rekursivt genom att låta $f(1) = 4$ och

$$f(n) = \sum_{k=1}^{n-1} f(k)$$

   för $n \geq 2$. Visa att för $n \geq 2$ gäller att $f(n) = 2^n$.

Lösningar

1. Eftersom f är ett tredjegradsuttryck med positiv x^3-koefficient finns det anledning att tro att f är växande överallt utom i ett intervall där f är avtagande. För att finna gränserna för detta intervall löser vi $f'(x) = 0$. Nu är $f'(x) = 3x^2 - 9x + 6 = 3(x - 1)(x - 2)$ så lösningarna är 1 och 2 och f är avtagande i intervallet $[1, 2]$.. Eftersom $f(1) = 4$ och $f(2) = 7/2$ ser vi att vi kan låta A vara just intervallet $[1, 2]$. (Det finns även andra tänkbara lösningar, bl.a. ett intervall till vänster om 1 och ett intervall till höger om 2.)

2. Eftersom $x + y = y + x$ för alla x oxh y är R reflexiv. Symmetrin är än mer uppenbar. Transitivitet: om $(x, y)R(u, v)$ och $(u, v)R(a, b)$ gäller $x + v = y + u$ och $u + b = v + a$. Summera ekvationerna och få $x + v + u + b = y + u + v + a$, dvs $x + b = y + a$, dvs $(x, y)R(a, b)$.

   Varje stråle med riktingskoefficient 1 i den positiva kvadranten av planet utgör en ekvivalensklass. För ett specifikt par (x, y) av positiva tal är $[(x, y)]$ den stråle som har sin ändpunkt i $(0, x - y)$ då $x \geq y$ och i punkten $(y - x, 0)$ då $x \leq y$.

3. Påståendet är sant då $n = 16, 17, 18$ ty $16 = 2\cdot3+2\cdot5$, $17 = 4\cdot3+1\cdot5$ och $18 = 1\cdot3+3\cdot5$. Låt nu j vara ett godtyckligt heltal större än 18 och antag att alla talen $16, 17, 18, \ldots, j-1$ kan skrivas på önskat sätt. Då gäller speciellt att det finns två ickenegativa heltal k och m sådana att $j-3 = 3k+5m$. Då följer att

$$j = j-3+3 = 3k+5m+3 = 3(k+1)+5m$$

dvs även talet j kan skrivas på önskat sätt. Resultatet som skulle visas följer nu av induktionsprincipen.

4. Det gäller att $f(2) = f(1) = 4$. Fixera ett positivt heltal $m \geq 2$ och antag att $f(m) = 2^m$. Då gäller att

$$f(m+1) = \sum_{k=1}^{m} f(k) = f(m) + \sum_{k=1}^{m-1} f(k) = 2f(m) = 2 \cdot 2^m = 2^{m+1}.$$

Resultatet följer nu av induktionsprincipen.