**Diskret matematik D ht 2005: Veckoblad läsvecka 4**

1. Låt $a$ och $b$ vara två positiva reella tal. Sätt $A = (a+b)/2$, $G = \sqrt{ab}$ och $H = 2/(\frac{1}{a}+\frac{1}{b})$, det aritmetiska, geometriska respektive harmoniska medelvärdet av $a$ och $b$. Visa att det för alla $a$ och $b$ gäller att

   $$H \leq G \leq A.$$

   **Tips:** Eftersom $A$, $G$ och $H$ är positiva går det lika bra att visa att $H^2 \leq G^2 \leq A^2$.

2. Låt $a$ och $b$ vara två positiva heltal och låt $d$ vara deras största gemensamma delare. Låt $m$ vara heltalet $ab/d$.

   (a) Visa att $a|m$ och $b|m$.

   (b) Visa att om $n$ är ett positivt heltal sådant att $a|n$ och $b|n$, så gäller att $m|n$.

   (En konsekvens av (a) och (b) är att $m$ är det minsta positiva tal som är en multipel av både $a$ och $b$. Följaktligen kallas $m$ för den minsta gemensamma multipeln (eller ibland för den minsta gemensamma nämnaren) till $a$ och $b$. Man skriver $m$=mgm$(a, b)$.)

3. Vad är inversen till $[72]$ i $\mathbb{Z}_{103}$?

4. Finns det några heltal $n$ sådana att både $\frac{5n-4}{6}$ och $\frac{7n+1}{4}$ är heltal?

   **Tips:** Skriv $5n = 6x + 4$ och $7n = 4y - 1$ för heltal $x$ och $y$ och försök att bestämma $x$ och $y$.

**Lösningar**

1. Vi börjar med att visa att $H \leq G$. Observera att man genom att förlänga med $ab$ ser att $H = 2ab/(a+b)$ så att visa att $H^2 \leq G^2$ är samma sak som att visa att $4(ab)^2 \leq (a+b)^2 ab$, dvs $4ab \leq (a+b)^2$ (då ju $a$ och $b$ är positiva så att det går bra att dividera med $ab$ i olikheten). Men att $4ab \leq (a+b)^2$ följer av att $(a+b)^2 - 4ab = a^2 + b^2 - 2ab = (a-b)^2 \geq 0$.

   Nu visar vi att $G^2 \leq A^2$, dvs att $ab \leq (a+b)^2/4$, dvs $4ab \leq (a+b)^2$. Men att detta är sant såg vi alldeles nyss.

2. Eftersom $d$=sgd$(a, b)$ gäller att det finns två relativt prima heltal $s$ och $t$ sådana att $a = sd$ och $b = td$. (Talen $s$ och $d$ är relativt prima eftersom $d$ är den *största* gemensamma delaren.) Det gäller att $m = ab/d = std^2/d = std$ som uppenbart är en multipel av $a = st$ såväl som $b = td$. Detta löser uppgift (a), så låt oss nu ta oss an uppgift (b). Att $a|n$, dvs $sd|n$ betyder att $n = qsd$ för något heltal $q$. Att $b|n$ betyder då att $b|qsd$, dvs $td|qsd$, dvs $t|qs$. Men eftersom $s$ och $t$ är relativt prima gäller det då att $t|q$ (Sats 7.2.1) så att $q = rt$ för något heltal $r$. Vi får $n = qsd = rstd = rm$, dvs $m|n$.

3. Inversen är $[-10]$, (dvs $[93]$), ty $72 \cdot (-10) = -720 = (-7) \cdot 103 + 1$. (Använd gärna Euklides utökade algoritm för att finna inversen.)

4. Man vill finna ett heltal $n$ så att $5n \equiv 4$ mod 6 och $7n \equiv -1$ mod 4. Med andra ord ska det finnas två heltal $x$ och $y$ så att $5n = 4 + 6x$ och $7n = -1 + 4y$. Multiplicera dessa ekvationer med $7$ respektive $5$ och få $35n = 28 + 42x = -5 + 20y$ som efter lite ommöbleringar ger $20y - 42x = 33$, en icke lösbar diofantisk ekvation. Slutsatsen blir att det inte finns några $n$ av efterfrågat slag.